HØGSKOLEN I GJØVIK

EKSAMEN I
MATEMATIKK 30 (REA3002)

24. MARS 2011 KL. 0900 – 1300

Oppgave 1

(a) En kurve C i xy-planet er gitt ved likningen $x^4 + y^4 - 9xy = 43$. Vis at punktet $(2,3)$ ligger på C, finn en vektor i $\mathbf{R}^2$ som står normalt på C i $(2,3)$, og finn en likning for tangenten til C i $(2,3)$.

(b) En flate S i $\mathbf{R}^3$ er gitt ved likningen $x^4+y^4+z^4-14xyz = 17$. Vis at punktet $(2,3,4)$ ligger på S, finn en vektor i $\mathbf{R}^3$ som står normalt på S i $(2,3,4)$, og finn en likning for tangentplanet til S i $(2,3,4)$.

(c) Hvis en beveger seg utover fra origo i $\mathbf{R}^3$, langs den rette linja gjennom punktet $(2,3,4)$, er da verdien av $x^4 + y^4 + z^4 - 14xyz$ økende eller avtakende idet en passerer gjennom punktet $(2,3,4)$?

Oppgave 2

Området D i $\mathbf{R}^2$ er avgrenset av sirkelen med sentrum i $(0,3)$ og radius 3. Sett opp dobbeltintegralet $\iint_D y\,dA$ i kartesiske koordinater (dvs. med x og y som integrasjonsvariable, i den rekkefølgen du selv velger), og i polarkoordinater (dvs. med r og θ som integrasjonsvariable), og beregn verdien av dobbeltintegralet.

Oppgave 3

Legemet T i $\mathbf{R}^3$ er avgrenset av kuleflaten med sentrum i $(0,0,3)$ og radius 3. Sett opp trippelintegralet $\iiint_T z^2\,dV$ i kartesiske koordinater (dvs. med x, y og z som integrasjonsvariable, i den rekkefølgen du selv velger), og i kulekoordinater (dvs. med ρ, ϕ og θ som integrasjonsvariable), og beregn verdien av trippelintegralet.

Oppgave 4

To flater i rommet, S_1 og S_2, er gitt ved:

$$S_1: \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{og} \quad z = 0\,, \qquad S_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{og} \quad z \geq 0\,,$$

vektorfeltet $\vec{F}$ er definert i hele rommet ved: $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{\jmath}\,,$ og kurven C er den felles randkurven for flatene S_1 og S_2.

(a) Sett opp arbeidsintegralet $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds\,,$ der C skal være orientert "mot urviserne, sett ovenfra", ved å bruke en parametrisering av C. Regn også ut verdien av integralet.

(b) Vis hvordan verdien av arbeidsintegralet i (a) kan finnes ved å beregne et fluksintegral på flaten S_1.

(c) Vis hvordan fluksintegralet $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{k} \cdot \vec{n}\, dS\,,$ der $\vec{n}$ er den oppoverrettede enhetsnormalvektoren på S_2, kan beregnes ved å bruke resultatet i (a).

Oppgave 5

En gitarstreng er festet til x-aksen i $x = 0$ og $x = 4$, og den settes i svingninger ved at den fram til tidspunktet $t = 0$ holdes i ro på en slik måte at den følger et rett linjestykke i xy-planet mellom origo og punktet $(1, \frac{1}{100})$, så et rett linjestykke mellom $(1, \frac{1}{100})$ og $(2, 0)$, og så et rett linjestykke mellom $(2, 0)$ og $(4, 0)$. Så, ved $t = 0$, slippes den løs (vel, endepunktene holdes fortsatt fast). Vi forutsetter at dens form $y = u(x, t)$ ved ethvert senere tidspunkt t er slik at $u_{xx} = u_{tt}$.

(a) Finn et rekkeuttrykk for $u(x, t)$ for $t \geq 0$ ved å gjennomføre metoden med separasjon av variable. Koeffisientene i rekka kan settes opp som integraler, og det er ikke nødvendig å regne ut disse.

(b) Tegn en skisse av strengens form ved $t = \frac{1}{2}$. Bruk en målestokk på 4 cm pr. enhet langs x-retningen og 300 cm pr. enhet i y-retningen.

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 30

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\ r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\ \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og "curl":

$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$

$\mathrm{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$, der $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$

$$\mathrm{curl}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \;=\; \iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds \;=\; \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t) + aF(t) = 0$ er $F(t) = Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$ (der $a \neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

(2) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t) = (C_1 t + C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to komplekse røtter, $\alpha \pm \beta i$:
$F(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$.

Partielle differensiallikninger,
d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x + ct) + G(x - ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x, 0) = 0$ kan skrives slik: $F(x+ct)+F(x-ct)$.

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0, L]$, da gjelder følgende for de $x \in [0, L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx,$$

og: $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{der} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx.$$