V2009 - OPPG. 4

EMILIE ARENTZ-HANSEN

Jeg tror tanken er at du ønsker å finne en ringhomomorfi $\phi : \mathbb{Z}_p[x] \to M_2(\mathbb{Z}_p)$ slik at

$$\operatorname{Im}\phi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}_p \right\},$$

der $p = 3$ i b) og $p = 5$ i c). Dvs at $\operatorname{Im}\phi = F$ i b) og $\operatorname{Im}\phi = R$ i c). Fundamentalteoremet for ringhomomorfier gir at ringen $\operatorname{Im}\phi$ er isomorf med $\mathbb{Z}_p[x]/\operatorname{Ker}\phi$. Videre vet du at $\mathbb{Z}_p[x]/\operatorname{Ker}\phi$ er en kropp hvis og bare hvis $\operatorname{Ker}\phi$ er et maksimalt ideal i $\mathbb{Z}_p[x]$ (Teorem 27.9). Det holder derfor å finne ut om $\operatorname{Ker}\phi$ er et maksimalt ideal eller ikke.

Men først må du altså finne en ringhomomorfi $\phi : \mathbb{Z}_p[x] \to M_2(\mathbb{Z}_p)$ som tilfredsstiller

$$\operatorname{Im}\phi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

Hvis du fikserer en matrise $A \in M_2(\mathbb{Z}_p)$ og lar $\psi_A : \mathbb{Z}_p[x] \to M_2(\mathbb{Z}_p)$ være definert av

$$\psi_A(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0 I_2 + a_1 A + \cdots + a_n A^n$$

så gir dette en ringhomomorfi (akkurat som i V2010 oppg. 3). Man kan derfor prøve å finne en matrise A slik at $\phi = \psi_A$ tilfredsstiller kravet som nevnt over. Siden

$$\psi_A(x) = A$$

så må A være på formen $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ der $a, b \in \mathbb{Z}_p$, ellers vil $\psi_A(x) \notin \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\}$.

Du kan selv sjekke at

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gir oss det bildet vi ønsker (merk at dette er uavhengig av hva p er). Og siden $A^2 = -I_2$ får du at

$$\psi_A(x^2 + 1) = A^2 + I_2 = 0,$$

så $x^2 + 1 \in \operatorname{Ker}\psi_A$. Du kan nå gjøre som i fasit og vise at $\operatorname{Ker}\psi_A = < x^2 + 1 >$ og bruke resultatene fra a) til å si om dette er et maksimalt ideal eller ikke (bruk teorem 27.25 som sier at $< x^2 + 1 >$ er et maksimalt ideal hvis og bare hvis $x^2 + 1$ er et irreduktibelt polynom).