Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt : Petter Andreas Bergh
Telefon: 92032532

Eksamen i MA1202 Lineær algebra med anvendelser

Bokmål
Torsdag 9. juni 2011
Kl. 15.00–19.00 (4 timer)

Hjelpemidler: kode D (bestemt enkel kalkulator: HP30S eller Citizen SR-270X)

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

a) Finn rangen og nulliteten til matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & t & 1+2t \\ 1 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

for alle $t \in \mathbb{R}$.

b) For hvilke $t \in \mathbb{R}$ er ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + ty + (1+2t)z &= 1 \\ tx + z &= t \\ x + y + 2tz &= 2 \end{aligned}$$

løsbart?

Oppgave 2 Finn en ortogonal basis for kolonnerommet til matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3 La $v_1, \ldots, v_n$ være ikke-trivielle ortogonale vektorer i et indreproduktrom, dvs. $v_i \neq 0$ for alle i og $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ for $i \neq j$. Vis at vektorene da må være lineært uavhengige.

Oppgave 4

a) Diagonaliser matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & \pi & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

b) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5f(x) - 3h(x) \\ g'(x) &= f(x) + \pi g(x) \\ h'(x) &= f(x) + h(x) \end{aligned}$$

Oppgave 5 La V være et vektorrom med basis $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$, og W et vektorrom med basis $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. La videre $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon med tilhørende matrise

$$[T]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} \pi & 2\pi & 5 \\ 9 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5\pi & 3 \end{pmatrix}$$

a) Finn $T(3v_1 - 8v_3)$.

b) Er T surjektiv (altså på)?

Oppgave 6 Finn den stabile tilstandsvektoren til en Markovkjede med overgangsmatrise

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 7 La $C[0,2\pi]$ være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner på intervallet $[0,2\pi]$, med indreprodukt

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

La W være underrommet med ortogonal basis

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \sin x, \sin 2x, \sin 3x\}.$$

Finn $\mathrm{proj}_W\, f(x)$, hvor $f(x) = e^x$ (dvs. finn "Fourierrekken" til $f(x) = e^x$ av grad 3). Tips: for $n \geq 1$ gjelder

$$\begin{aligned} \int e^x \cos nx dx &= e^x \cos nx + n \int e^x \sin nx dx \\ \int e^x \sin nx dx &= e^x \sin nx - n \int e^x \cos nx dx \end{aligned}$$