**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt : Petter Andreas Bergh
Telefon: 92032532

Eksamen i MA1202 Lineær algebra med anvendelser

Bokmål
Torsdag 27. mai 2010
Kl. 09.00–13.00 (4 timer)

Hjelpemidler: kode D (bestemt enkel kalkulator: HP30S eller Citizen SR-270X)

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 Se på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Finn rangen og nulliteten til A (rank(A) og nullity(A)).

b) Finn en basis for kolonnerommet til A.

c) Bruk Gram-Schmidt-prosessen til å finne en ortogonal basis for radrommet til A.

Oppgave 2 Bruk minste kvadraters kurvetilpasning til å finne ligningen $y = ax + b$ som best approksimerer følgende punkter (x_i, y_i):

$$(-1, 4), (0, 3), (1, 2), (2, 2).$$

Oppgave 3 La A være en kompleks $n \times n$-matrise som tilfredsstiller $A^* = (-i)A$. La videre D være $n \times n$-matrisen $D = (3 - 3i)I$, dvs D er diagonalmatrisen hvor det står $3 - 3i$ på diagonalen. Vis at DA er hermitisk. Er DA unitært diagonaliserbar?

Oppgave 4 La C være vektorrommet bestående av alle kontinuerlige funksjoner på $\mathbb{R}$, og la V og W være underrom med basiser

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_V &= \{x, x^2, x + \sin x, \cos x\} \quad \text{(basis for } V\text{)} \\ \mathcal{B}_W &= \{1, x + 4, \sin x, 2x + \cos x\} \quad \text{(basis for } W\text{)} \end{aligned}$$

(du trenger ikke å vise at V og W er underrom av C, og heller ikke at $\mathcal{B}_V$ og $\mathcal{B}_W$ tilfredsstiller kravene til å være basiser). Se på lineærtransformasjonen $T\colon V \to W$ gitt ved

$$T(f(x)) = f'(x) \quad \left(= \frac{d}{dx} f(x)\right)$$

(du trenger ikke å vise at dette er en lineær transformasjon).

a) Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}$ med hensyn på basisene $\mathcal{B}_V$ og $\mathcal{B}_W$. Er T en isomorfi?

b) La v være vektoren

$$v = 2x + 3x^2 + 7 \sin x$$

i V. Finn koordinatvektorene $[v]_{\mathcal{B}_V}$ og $[T(v)]_{\mathcal{B}_W}$.

Oppgave 5 Se på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene til A.

b) Diagonaliser A, dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

c) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3f(x) + g(x) \\ g'(x) &= f(x) + g(x) - h(x) \\ h'(x) &= 2f(x) - 8g(x) + h(x) \end{aligned}$$