TMA4110
Matematikk 3
Høst 2010

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 1

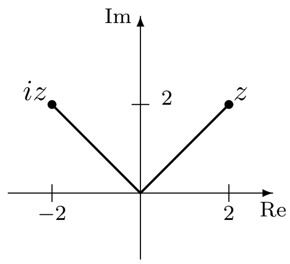
Fra Kreyszig (9. utgave) avsnitt 13.1

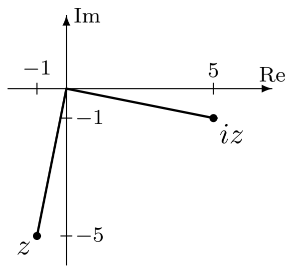
$\boxed{2}$ Vi skisserer z og iz og regner ut skalarproduktet av vektorene for ulike verdier av z for å vise at iz tilsvarer en $\pi/2$ radianers rotasjon av z i det komplekse plan.

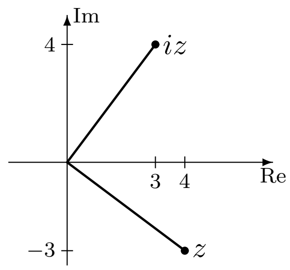
1)
$$z = 2 + 2i$$
$$iz = -2 + 2i$$
$$[2, 2] \cdot [-2, 2] = 0$$

2)
$$z = -1 - 5i$$
$$iz = 5 - i$$
$$[-1, -5] \cdot [5, -1] = 0$$

3)
$$z = 4 - 3i$$
$$iz = 3 + 4i$$
$$[4, -3] \cdot [3, 4] = 0$$







$\boxed{4}$ Vi skal vise at hvis produktet $z_1 z_2 = 0$, så må vi enten ha at $z_1 = 0$ eller at $z_2 = 0$. Hvis $z_1 \neq 0$, kan vi multiplisere $z_1 z_2 = 0$ på begge sider med z_1^{-1} og få $z_2 = 0$. Tilsvarende får vi at $z_1 = 0$ hvis $z_2 \neq 0$.

Alternativt: Vi antar at $z_1 \neq 0$ og at $z_1 z_2 = 0$. Da vil

$$|z_2| = \frac{|z_1||z_2|}{|z_1|} = \frac{|z_1 z_2|}{|z_1|} = \frac{0}{|z_1|} = 0$$

Når absoluttverdien $|z_2| = 0$ er også $z_2 = 0$. Tilsvarende hvis $z_2 \neq 0$.

$\boxed{5}$ Tallet $z = x + iy$ er rent imaginært hvis og bare hvis $\operatorname{Re} z = 0$. Men $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, så z er rent imaginært hvis og bare hvis $\bar{z} = -z$.

$\boxed{8}$ Vi har at $\overline{z_1} = 2 - 3i$ og $\overline{z_2} = 4 + 5i$, slik at

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (2 - 3i)(4 + 5i) = 8 + 10i - 12i - 15i^2 = 8 - 2i + 15 = 23 - 2i$$

Fra Kreyszig (9. utgave) side 634

$\boxed{17}$

$$(-2 + 6i)^2 = (-2)^2 + 2 \cdot (-2 \cdot 6i) + (6i)^2 = 4 - 24i + 36i^2$$
$$= 4 - 24i - 36 = -32 - 24i$$

$\boxed{18}$ Vi utnytter at $z\overline{z} = |z|^2$ for alle $z \in \mathbb{C}$, så ved gange med den komplekskonjugerte av nevneren oppe og nede får vi

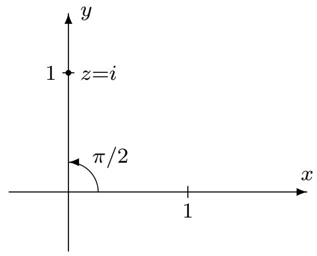
$$\frac{1}{3-7i} = \frac{3+7i}{(3-7i)(3+7i)} = \frac{3+7i}{3^2+7^2} = \frac{3}{58} + \frac{7}{58}i$$

Fra Kreyszig (9. utgave) avsnitt 13.2

$\boxed{5}$ Vi skal skrive det komplekse tallet $z = \frac{1+i}{1-i}$ på polarform. Vi har

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = i.$$

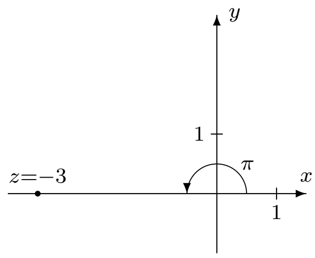
Da får vi $z = i \sin \pi/2$, så $r = |z| = 1$, $\theta = \arg z = \pi/2$.



$\boxed{6}$ Vi skal skrive det komplekse tallet $z = \frac{3\sqrt{2}+2i}{-\sqrt{2}-(2/3)i}$ på polarform. Vi har

$$z = \frac{3\sqrt{2}+2i}{-\sqrt{2}-(2/3)i} = \frac{3\big(\sqrt{2}+(2/3)i\big)}{-\big(\sqrt{2}+(2/3)i\big)} = -3.$$

Da får vi $z = -3 = 3\cos\pi$, så $r = |z| = 3$, $\theta = \arg z = \pi$.



$\boxed{14}$ Vi søker hovedverdien (the principal value) for argumentet til $(1+i)^{12}$.

$$\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(1+i)^{12} = 12 \cdot \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Med $k = -1$ får vi vinkelen π, som er i intervallet $(-\pi, \pi]$. Følgelig er $\operatorname{Arg}(1+i)^{12} = \pi$.

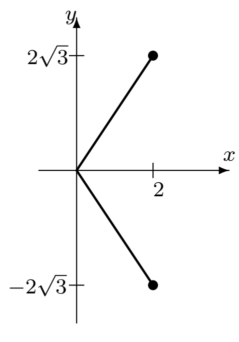
$\boxed{18}$ Vi skal representere det komplekse tallet $z = 4(\cos\frac{\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})$ på formen $z = x + \mathrm{i}y$. Vi observerer at z er gitt på polarform med $r = 4$ og $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Vi får

$$x = r\cos\theta = 4\cos\frac{\pm\pi}{3} = 2$$

og

$$y = r\sin\theta = 4\sin\frac{\pm\pi}{3} = \pm 2\sqrt{3},$$

så $z = 2 \pm \mathrm{i}2\sqrt{3}$.

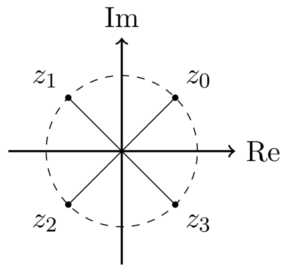


$\boxed{23}$ Polarformen av -1 er $\cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$, så vi bruker formelen øverst på side 611 med $r = 1, \theta = \pi$ og $n = 4$:

$$\sqrt[n]{z} = \left(\cos\frac{\pi(1+2k)}{4} + i\sin\frac{\pi(1+2k)}{4}\right)$$

for $n = 0, 1, 2, 3$. Det gir oss røttene

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
z_1 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
z_2 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
z_3 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$



$\boxed{32}$ Vi skal vise at $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ og $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$. Vi skriver z på formen $z = x + iy$, da $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ og $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vi får

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{og} \quad |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Flervalgsoppgave

$\boxed{1}$ Vi har $-1 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$ og løsningene til $z^7 = -1$ er

$$z = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{7}} = \cos\frac{2k+1}{7}\pi + i\sin\frac{2k+1}{7}\pi,$$

hvor $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 6$. Vi ser at $\operatorname{Im} z < 0$ hvis og bare hvis $k = 4, 5, 6$. Vi får tre løsninger med negativ imaginærdel, og alternativ **B** er det riktige.

Alternativt: Vi har kun en reell løsning, $z = -1$. Hvis z_0 er en løsning, så er også $\bar{z}_0$ løsning siden vi har $(\bar{z}_0)^7 = \overline{(z_0^7)} = -1$. Da får vi én reell løsning og tre par komplekskonjugerte løsninger. I hvert par er det akkurat ett tall med negativ imaginærdel. Vi får igjen at alternativ **B** er det riktige.

$\boxed{2}$ Med $z = x + iy$ er $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ og $i\bar{z} = ix + y$. Den gitte ligningen kan skrives som

$$x^2 - y^2 - y + i(2xy - x) = \frac{1}{4}.$$

Da er $x^2 - y^2 - y = \frac{1}{4}$ og $2xy - x = 0$. Fra $2xy - x = 0$ har vi $x = 0$ eller $y = \frac{1}{2}$. Hvis $x = 0$ får vi $y^2 + y + \frac{1}{4} = 0$ og $y = -\frac{1}{2}$, det gir en løsning $z = \frac{-i}{2}$. Hvis $y = \frac{1}{2}$ da har vi $x^2 = 1$ og $x = \pm 1$, vi får to løsninger til, $z = \pm 1 + \frac{i}{2}$. Til sammen har ligningen tre løsninger.