i Forside

Prøveeksamen i TMA4115 Matematikk 3 våren 2020.

Hver oppgave teller 1 poeng hver. Totalt er det 40 oppgaver.

Det kreves ca. 40 % riktig for å bestå en eksamen, som er 16 oppgaver eller mer i dette tilfellet.

Oppgavene på eksamen vil bli av lignende form som i denne prøveeksamen.

Alle hjelpemidler er tilgjengelig, men det er ikke lov å kommunisere med andre under eksamen.

Løsningsforslag publiseres på wikien utenom.

1 Oppgave 1

Løs ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ x + y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Svar: x = , y = , z = .

Maks poeng: 1

2 Oppgave 2

Anta at totalmatrisen (den utvidede matrisen) til et lineært ligningssystem har følgende reduserte trappeform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 4 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hvor mange løsninger har systemet?

Velg ett alternativ:

Ingen løsning

Nøyaktig en løsning

Uendelig mange løsninger

Det avhenger av a og b

Maks poeng: 1

3 Oppgave 3

Anta at totalmatrisen (den utvidede matrisen) til et lineært ligningssystem har følgende reduserte trappeform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right]$$

Hvor mange løsninger har systemet?

Velg ett alternativ:

Ingen løsning

Nøyaktig en løsning

Uendelig mange løsninger

Det avhenger av a og b

Maks poeng: 1

4 Oppgave 4

La $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Hva er determinanten til A? det A = .

Maks poeng: 1

5 Oppgave 5

La $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Hva er inversen til A?

Velg ett alternativ:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Maks poeng: 1

6 Oppgave 6 - 8

La A være en reell $n \times n$-matrise. Betrakt følgende påstander:

6) Hvis det A = 2, så er den reduserte trappeformen av A lik I_n (identitetsmatrisen).

Velg et alternativ:

Usant

Sant

7) Hvis det A = 0, så må det finnes en rad i A som er et multiplum av en annen rad i A.

Velg et alternativ:

Sant

Usant

8) Hvis A er en øvre triangulær matrise, så har A en øvre triangulær invers.

Velg et alternativ:

Usant

Sant

Maks poeng: 3

7 Oppgave 9 - 10

La A og B være inverterbare $n \times n$-matriser. Betrakt følgende påstander:

9) Summen $A + B$ er alltid inverterbar.

Velg et alternativ:

Sant

Usant

10) Produktet $A \cdot B^T$ er alltid inverterbart.

Velg et alternativ:

Sant

Usant

Maks poeng: 2

8 Oppgave 11 - 13

Avgjør om følgende delmengder av $\mathbb{R}^3$ er underrom av $\mathbb{R}^3$.

11) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \middle| \quad x \leq y \leq z \right\}.$

Velg et alternativ:

Usant

Sant

12) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \middle| \quad |x| \leq |y| \leq |z| \right\}.$

Velg et alternativ:

Sant

Usant

13) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \middle| \quad x + y = z \right\}.$

Velg et alternativ:

Usant

Sant

Maks poeng: 3

9 Oppgave 14 - 15

Anta at A har redusert trappeform $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

14) Hva er dim Col A? Svar: .

15) Hva er dim Null A? Svar: .

Maks poeng: 2

10 Oppgave 16 - 18

Avgjør om følgende funksjoner er lineærtransformasjoner.

16) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - 1 \end{bmatrix}.$

Velg et alternativ:

Usant

Sant

17) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3^x \\ 2y \end{bmatrix}.$

Velg et alternativ:

Usant

Sant

18) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x + y - z.$

Velg et alternativ:

Usant

Sant

Maks poeng: 3

11 Oppgave 19 - 20

La V og W være vektorrom, og anta at dim V = 3, dim W = 4. Vurder følgende påstander.

19) Det finnes ingen surjektiv lineærtransformasjon $T : V \to W$.

Velg et alternativ:

Usant

Sant

20) Enhver lineærtransformasjon $T : V \to W$ er injektiv.

Velg et alternativ:

Usant

Sant

Maks poeng: 2

12 Oppgave 21 - 23

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

21) Er A diagonaliserbar?

Velg et alternativ:

Nei

Ja

22) Hva er egenverdiene til B?

Velg ett alternativ:

1 og -1

-1 og -2

0 og 1

1 og 2

23) Hvilken matrise diagonaliserer B?

Velg ett alternativ:

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Maks poeng: 3

13 Oppgave 24

Anta at A er en 3x3-matrise med egenverdi 3. Hva kan vi si om A^2?

Velg ett alternativ:

Den har egenverdi 3

Den har egenverdi 6

Den har egenverdi 9

Vi kan ikke si noe om egenverdiene til matrisen.

Maks poeng: 1

14 Oppgave 25

La $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen som roterer en vektor med en vinkel α radianer, der $0 < \alpha < \pi$. Hvilken er sann?

Velg ett alternativ:

T har ingen egenverdier.

T har ingen reelle egenverdier.

T har egenverdi 1.

T har egenverdi 0.

Maks poeng: 1

15 Oppgave 26 - 30

La A være en reell 3x3-matrise og la B være en reell 2x2-matrise. Vurder om følgende påstander er sanne eller usanne for enhver slik matrise A eller B.

26) A har minst en reell egenverdi.

Velg et alternativ:

Sant

Usant

27) B har minst en reell egenverdi.

Velg et alternativ:

Usant

Sant

28) Det finnes en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A.

Velg et alternativ:

Sant

Usant

29) Hvis 0 er en egenverdi for A, så er A ikke inverterbar.

Velg et alternativ:

Sant

Usant

30) Hvis 1 er en egenverdi for B, så er B inverterbar.

Velg et alternativ:

Usant

Sant

Maks poeng: 5

16 Oppgave 31 - 32

31) Hva er polarform av $2 + 2i$?

Velg ett alternativ:

$4e^{i\frac{\pi}{4}}$

$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$

$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$-2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

32) Hvor mange komplekse løsninger har ligningen $z^4 + 1 = 0$?

Velg ett alternativ:

Ingen

2

4

Uendelig mange

Maks poeng: 2

18 Oppgave 36 - 37

La P være planet $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \middle| \quad x - y - z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

36) Hvilken er en ortogonal basis for P?

Velg ett alternativ:

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

37) Hva er avstanden fra punktet $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ til P? Svar: (oppgi med tre desimaler).

Maks poeng: 2

17 Oppgave 33 - 35

33) Dersom en kompleks 3x3-matrise har egenverdi $\lambda \in \mathbb{C}$ så er alltid $\bar{\lambda}$ også en egenverdi.

Velg et alternativ:

Sant

Usant

34) Dersom en reell 3x3-matrise har egenverdi $\lambda \in \mathbb{C}$ så er alltid $\bar{\lambda}$ også en egenverdi.

Velg et alternativ:

Usant

Sant

35) Komplekse 3x3-matriser er alltid diagonaliserbare.

Velg et alternativ:

Sant

Usant

Maks poeng: 3

19

Oppgave 38

Hva er løsningen til initialverdiproblemet gitt ved:
$y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_2' = y_2, \quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = -1?$

Velg ett alternativ:

$y_1 = e^{2t} + e^t, \quad y_2 = -e^t$

$y_1 = 2e^{2t} + e^t, \quad y_2 = e^t$

$y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{2t} + e^t$

$y_1 = e^{2t} - e^t, \quad y_2 = e^{2t} + e^t$

Maks poeng: 1

20

Oppgave 39

I senmiddelalderen eksisterte bare tre NTNU-campuser: Gløshaugen, Dragvoll og Kalvskinnet. Munken i Nidarosdomen er en ivrig hobbystatistiker og syns det er interessant å følge med på hvordan barna til tidligere NTNU-studenter velger campuser å studere ved.

Han finner ut at for 80 % av Gløshaugen-studentene velger barna deres å gå på Gløshaugen, mens resten velger Kalvskinnet. For Dragvoll-studentene velger 70 % av deres barn å studere ved Dragvoll, 20 % velger Gløshaugen, mens resten velger Kalvskinnet. Av barna til Kalvskinnet-studenter velger 40 % å studere ved Kalvskinnet, mens resten fordeler seg likt mellom Gløshaugen og Dragvoll.

Hva er sannsynligheten for at barnebarnet til en Gløshaugen-student også studerer ved Gløshaugen?

Sannsynlighet: %.

Maks poeng: 1

21 Oppgave 40

La A være en diagonaliserbar matrise med reelle egenverdier. Dersom $A^4 = A$, forklar hvorfor dette betyr at A også oppfyller $A^2 = A$.

Skriv ditt svar her:

Words: 0

Maks poeng: 1