Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.4

5 Vi har gitt systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 4 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi skal bruke Cramers regel for å løse systemet over. Først bestemmes $\det A$. Når denne er kjent (og ulik 0), kan vi bruke Cramers regel til å finne x_1, x_2 og x_3.

Ved å utvikle langs tredje rad får vi

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 4 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -17 + 40 = 23.$$

For x_1, x_2 og x_3 får vi (ved for eksempel å utvikle determinantene langs første rad):

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} \mathbf{3} & -1 & -5 \\ \mathbf{-4} & -4 & -3 \\ \mathbf{2} & 0 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{23}\big(3 \cdot 20 - (-1) \cdot 26 + (-5) \cdot 8\big) = 2,$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{3} & -5 \\ 4 & \mathbf{-4} & -3 \\ 1 & \mathbf{2} & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{23}\big(3 \cdot 26 - 3 \cdot (-17) + (-5) \cdot 12\big) = 3,$$

$$x_3 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 3 & -1 & \mathbf{3} \\ 4 & -4 & \mathbf{-4} \\ 1 & 0 & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{23}\big(3 \cdot (-8) - (-1) \cdot 12 + 3 \cdot 4\big) = 0.$$

15 Vi har gitt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

og skal finne A^{-1} ved utregning av den adjungerte matrisen $\operatorname{adj} A$.

Vi får

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-5) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 35$$

(ved å addere (-1) ganger første kolonne til tredje kolonne og utvikle etter tredje rad) og

$$\begin{aligned} A_{11} &= -15, & A_{12} &= 10, & A_{13} &= 15 \\ A_{21} &= 25, & A_{22} &= -5, & A_{23} &= -25\ . \\ A_{31} &= -26, & A_{32} &= 8, & A_{33} &= 19 \end{aligned}$$

Dermed blir

$$\text{adj}\, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 25 & -26 \\ 10 & -5 & 8 \\ 15 & -25 & 19 \end{bmatrix},$$

og

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, \text{adj}\, A = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} -15 & 25 & -26 \\ 10 & -5 & 8 \\ 15 & -25 & 19 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{23}$ Dersom A er symmetrisk vil $A_{ij} = A_{ji}$, slik at kofaktormatrisen til A er symmetrisk. Da vil adj $A = [A_{ij}]^T$ være symmetrisk og følgelig er

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, \text{adj}\ A = \frac{1}{\det A}\, [A_{ij}]^T$$

også symmetrisk.

Alternativt (med kjennskap til transponeringsreglene side 86): Generelt har vi for A invertibel at $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Dette følger fra at $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$. Så for A symmetrisk er $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$, og A^{-1} er også symmetrisk.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.1

$\boxed{3}$ W er ikke et underrom i $\mathbb{R}^3$ siden $\mathbf{0}$ ikke er med i W. (Vektoren $\mathbf{0}$ er alltid et element i et underrom U, siden $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ for en vilkårlig vektor $\mathbf{v}$ i U, og dersom $\mathbf{v}$ ligger i U, så må også $c\mathbf{v}$ gjøre det for alle $c \in \mathbb{R}$). Vi nevner to alternative løsninger også: Vi har at $\mathbf{v} = (0,1,0)$ en vektor i W, mens $\mathbf{v}+\mathbf{v} = (0,2,0)$ som ligger utenfor W (så W er ikke lukket under (vektor-)addisjon). Tilsvarende, ligger også f.eks $2\mathbf{v} = (0,2,0)$ utenfor W (så W er ikke lukket under skalarmultiplikasjon). Faktisk gjelder det samme for $c\mathbf{v}$ for alle $c \neq 1$.

$\boxed{8}$ Merk at for $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$ hvis og bare hvis $x_1 = x_2 = 0$. Vi har altså at $W = \{\mathbf{0}\}$. Da er W et underrom i $\mathbb{R}^2$ ved Teorem 1: $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$ og $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ for alle $c \in \mathbb{R}$.

$\boxed{19}$ Redusert trappeform av koeffisientmatrisa til dette systemet er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Her er x_3 en fri variabel. Løsningen blir:

$$x_3 = t, \quad x_1 = -t, \quad x_2 = -2t, \quad x_4 = 0.$$

Løsningsvektorene er på formen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Løsningsrommet er følgelig mengden av alle skalare multipla av vektoren $\mathbf{u} = (-1, -2, 1, 0)$.

30 Vi bruker Theorem 1 side 167 i EP. La $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \cap V$, og la c være en skalar. Siden U og V er underrom i W og $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er i både U og V, har vi at $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ og $c\mathbf{x}$ er i både U og V, dvs at $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ og $c\mathbf{x}$ er i $U \cap V$. Følgelig er $U \cap V$ et underrom i W.

Hvis U og V er plan gjennom origo, så er $U \cap V$ enten et plan (hvis $U = V$) eller en linje gjennom origo (hvis $U \neq V$).

Eksamensoppgaver

7 Anta $c_1\mathbf{x} + c_2A\mathbf{x} + c_3A^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Da er

$$\mathbf{0} = A(c_1\mathbf{x} + c_2A\mathbf{x} + c_3A^2\mathbf{x}) = c_1A\mathbf{x} + c_2A^2\mathbf{x} + c_3A^3\mathbf{x} = c_1A\mathbf{x} + c_2A^2\mathbf{x}.$$

Videre har vi

$$\mathbf{0} = A(c_1A\mathbf{x} + c_2A^2\mathbf{x}) = c_1A^2\mathbf{x} + c_2A^3\mathbf{x} = c_1A^2\mathbf{x}.$$

Men $A^2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ og da er $c_1 = 0$. Vi får også $c_2A^2\mathbf{x} = -c_1A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og $c_2 = 0$; på en lignende måte $c_3A^2\mathbf{x} = -c_1\mathbf{x} - c_2A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $c_3 = 0$. Så har vi $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dette viser at $\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}$ og $A^2\mathbf{x}$ er lineært uavhengige.

4 **a)** Vi regner først ut determinanten til A. Ved å utvikle langs første rad får vi

$$\begin{aligned}\det(A) = 1\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{vmatrix} - (-\alpha)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} &= \alpha^2 + \alpha^2 - 1 - \alpha^4 \\ &= -(\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1) = -(\alpha^2 - 1)^2.\end{aligned}$$

A er inverterbar for alle α som gjør $\det(A) \neq 0$. Det vil si for $\alpha \neq \pm 1$.

b) Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har nøyaktig en løsning når A er inverterbar, det vil si for $\alpha \neq \pm 1$. For $\alpha = \pm 1$ får vi (husk at $\alpha^2 = 1$)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 1+\alpha \end{array}\right] \xrightarrow{(-\alpha)R_1 + R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{SWAP}(R_2,R_4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{SWAP}(R_3,R_4)]{(-\alpha)R_2 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array}\right].$$

Vi ser at dersom $\alpha - 1 = 0$, det vil si $\alpha = 1$, får vi uendelig mange løsninger. For $\alpha = -1$ blir $\alpha - 1 = -2 \neq 0$ slik at ligningssystemet ikke får noen løsninger.

Flervalgsoppgaver

1 Vi kan ta utgangspunkt i at antall frie variabler k i et homogent system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er lik antall vektorer i en basis for løsningsrommet, $k = \dim \mathrm{Null}(A)$. Videre vet vi (se EP side 195) at for en $m \times n$–matrise A gjelder generelt

$$\mathrm{rang}(A) + \dim \mathrm{Null}(A) = n$$

der $\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{Row}(A) = \dim \operatorname{Col}(A)$. I oppgaven er A en 5×7–matrise, og da er $n = 7$ og $0 \leq \operatorname{rang}(A) \leq 5$. Vi har altså

$$k = \dim \operatorname{Null}(A) = 7 - \operatorname{rang}(A),$$

og siden $\operatorname{rang}(A) \leq 5$ følger $k \geq 2$, og siden $\operatorname{rang}(A) \geq 0$ følger $k \leq 7$. Dermed er $2 \leq k \leq 7$, og **C** er det riktige alternativet.

$\boxed{2}$ Vi skal bestemme rangen r for 3×4–matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi husker at $\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{Row}(A) = \dim \operatorname{Col}(A)$. Siden A har tre rader, er $r \leq 3$, og alternativ **D** ($r = 4$) er utelukket. Vi ser også at første og andre rad i A er lineært uavhengige, følgelig er $r \geq 2$ så alternativ **A** ($r = 1$) er også utelukket.

For å avgjøre om det er alternativ **B** eller **C** som er riktig, kan vi omforme A til en echelonmatrise og lese av $\dim \operatorname{Row}(A)$ som antall ikkenullrader. Vi får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Siden vi får tre ikkenullrader, er $r = 3$, og **C** er det riktige alternativet.