| | |
|---|---|
| Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet<br>Institutt for matematiske fag | TMA4110<br>Matematikk 3<br>Høst 2010<br>**Løsningsforslag — Øving 3** |

## Fra Kreyszig (9. utgave) avsnitt 2.4

$\boxed{1}$ Vi skal bestemme $A$ og $B$ slik at $y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ oppfyller startbetingelsene $y(0) = y_0$ og $y'(0) = v_0$. Siden

$$y(0) = A \quad \text{og} \quad y'(0) = (-\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t)\Big|_{t=0} = \omega_0 B,$$

får vi $A = y_0$ og $B = v_0/\omega_0$. Følgelig er

$$y(t) = y_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Med $y_0 = 1$ og $\omega_0 = \pi$ skal vi skissere løsningskurvene for forskjellige verdier av $v_0$.

$v_0 = \pi$ :

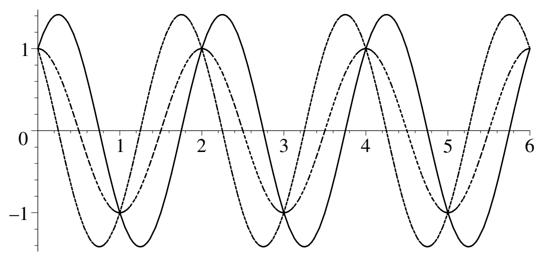
$$y(t) = \cos\pi t + \sin\pi t = \sqrt{2}\,\cos\left(\pi t - \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

$v_0 = 0$ :

$$y(t) = \cos\pi t$$

$v_0 = -\pi$ :

$$y(t) = \cos\pi t - \sin\pi t = \sqrt{2}\,\cos\left(\pi t + \tfrac{1}{4}\pi\right)$$




Vi ser at kurvene skjærer hverandre for $t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$. Generelt har vi skjæringspunkt mellom kurvene $y_1 = \cos\pi t + (v_{01}/\pi)\sin\pi t$ og $y_2 = \cos\pi t + (v_{02}/\pi)\sin\pi t$ når

$$(v_{01}/\pi)\sin\pi t = (v_{02}/\pi)\sin\pi t \quad \text{dvs. når} \quad (v_{01} - v_{02})\sin\pi t = 0.$$

Siden $\sin\pi t = 0$ når $t$ er heltall, vil alle kurvene skjære hverandre for $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

$\boxed{6}$ Som for et masse/fjær–system får vi (ved å bruke Arkimedes' lov istedenfor Hookes lov)

$$my'' = -\rho g(\pi r^2 y)$$

der $m$ er bøyens masse, $\rho$ er vannets massetetthet, $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, $g$ er tyngdeakselerasjonen, $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$, $r$ er bøyens radius, $r = 0.3$ m, og $\pi r^2 y$ er volumet og $\rho g(\pi r^2 y)$ tyngden av den ekstra vannmengden som fortrenges når bøyens vertikale posisjon avviker $y$ meter fra likevektspunktet. Det gir bevegelsesligningen

$$y'' + \omega_0^2 y = 0 \qquad (\text{der } \omega_0^2 = \rho g\pi r^2/m).$$

En generell løsning er $y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$. Vi har gitt at perioden $T$ er 2 sekunder, og siden $T = 2\pi/\omega_0$, får vi

$$2 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \text{som gir} \qquad \omega_0^2 = \pi^2 \qquad \text{dvs.} \qquad \frac{\rho g\ \pi r^2}{m} = \pi^2.$$

Dermed får vi $m = \rho g r^2/\pi \approx 281$ kg.

$\boxed{14}$ Vi har bevegelsesligningen $my'' + cy' + ky = 0$ der $m = 2$ kg. Siden bevegelsen skal være underdempet, må den karakteristiske ligningen $2\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ ha komplekse røtter som her blir på formen $\lambda = -c/4 \pm i\omega^*$. Løsningen $y$ kan følgelig skrives på formen

$$y = Ce^{-ct/4}\cos\left(\omega^* t - \delta\right).$$

Vi skal finne dempningskonstanten $c$.

Tidsavstanden mellom to påfølgende maksima er 2 sekunder. La $t_1$ være tidspunktet for første maksimum. Etter 15 svingninger er da tidspunktet $t_1 + 2 \cdot 15 = t_1 + 30$. Ved tidspunktene $t_1$ og $t_1 + 30$ er cosinusfaktoren den samme (hvorfor?), men $y$-verdien ved det siste tidspunktet skal være en fjerdedel av $y$-verdien ved det første tidspunktet. Altså er

$$Ce^{-c(t_1+30)/4}\cos\left(\omega^* t_1 - \delta\right) = \tfrac{1}{4}Ce^{-ct_1/4}\cos\left(\omega^* t_1 - \delta\right).$$

Det gir $e^{-30c/4} = \frac{1}{4}$, altså $-30c = 4\ln\frac{1}{4} = -4\ln 4$ og dermed $c = \frac{2}{15}\ln 4 = \frac{4}{15}\ln 2$.

## Fra Kreyszig (9. utgave) avsnitt 2.5

$\boxed{1}$ Vi skal finne en generell løsning av differensialligningen $x^2y'' - 6y = 0$. Dette er en Euler-Cauchy ligning, og innsetting av $y = x^m$ og $y'' = m(m-1)x^{m-2}$ gir

$$x^m(m(m-1) - 6) = x^m(m^2 - m - 6) = 0$$

for alle $x$, så vi må ha at $m^2 - m - 6 = 0$. Røttene til denne ligningen er gitt ved

$$m = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

så $m = 3$ og $m = -2$. Dermed er generell løsning gitt ved

$$y = c_1x^3 + c_2x^{-2}$$

$\boxed{11}$ Vi skal løse initialverdiproblemet $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$. Ligningen er en Euler–Cauchyligning ($x^2y'' + axy' + by = 0$), og vi kan finne løsninger av formen $y = x^m$ ved å løse hjelpeligningen $m^2 + (a-1)m + b = 0$. Den blir her

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \quad \text{og har røtter} \quad m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2. \end{cases}$$

Følgelig har ligningen generell løsning

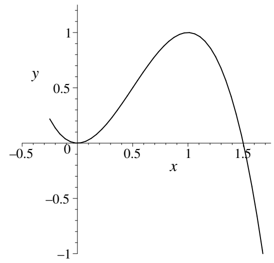
$$y = c_1 x^3 + c_2 x^2.$$

Vi bestemmer $c_1$ og $c_2$ ved å bruke initialbetingelsene:

$$1 = y(1) = c_1 + c_2$$
$$0 = y'(1) = (3c_1 x^2 + 2c_2 x)\Big|_{x=1} = 3c_1 + 2c_2.$$

Vi får $c_2 = -\frac{3}{2}c_1$ som innsatt i den første ligningen gir $c_1 = -2$ og dermed $c_2 = 3$. Løsningen blir altså

$$y = 3x^2 - 2x^3.$$




## Fra Kreyszig (9. utgave) avsnitt 2.6

$\boxed{4}$ Vi søker en differensialligning $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ med $y_1 = x^3 = x^{m_1}$ og $y_2 = x^{-2} = x^{m_2}$ som løsninger. Vi gjenkjenner $y_1$ og $y_2$ som løsninger av en Euler-Cauchy ligning $x^2y'' + axy' + by = 0$. Den tilhørende karakteristiske ligningen $h(m) = m^2 + (a-1)m + b = 0$ må dermed ha løsninger $m_1 = 3$ og $m_2 = -2$, så $h(m) = (m-3)(m+2) = m^2 - m - 6$. Altså er $a = 0$ og $b = -6$, så en Euler-Cauchy ligning med de oppgitte løsningene er

$$x^2y'' - 6y = 0.$$

Vi ser at $y_1$ og $y_2$ er lineært uavhengige siden (a) kvotienten $y_1/y_2 = x^3/x^{-2} = x^5$ ikke er konstant, og (b) ved Teorem 2, siden wronskideterminanten

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = x^3 \cdot -2x^{-3} - x^{-2} \cdot 3x^2 = -2 - 3 = -5$$

ikke er 0 noe sted i definisjonsmengden.

$\boxed{8}$ Vi søker en differensialligning $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ med $y_1 = e^{-2x}$ og $y_2 = xe^{-2x}$ som løsninger. Da dette er eksponensiallfunksjoner, er det naturlig å forsøke en homogen ligning med konstante koeffisienter; i så tilfelle må den karakteristiske ligningen ha en dobbelrot $\lambda = -2$. Altså er det karakteristiske polynomet gitt ved

$$h(\lambda) = (\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4.$$

Differensialligningen tilhørende dette polynomet er

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Lineær uavhengighet ser vi enkelt, siden (a) $y_1/y_2 = 1/x$ ikke er konstant, alternativt ved (b) Teorem 2, siden Wronskideterminanten er

$$W(y_1, y_2) = e^{-2x}(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) + 2e^{-2x}xe^{-2x} = e^{-4x}$$

ikke er 0 noe sted på $\mathbb{R}$.

$\boxed{13}$ Vi søker en differensialligning $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ med $y_1 = e^{-x}\cos 0.8x$ og $y_2 = e^{-x}\sin 0.8x$ som løsninger. Vi gjenkjenner $y_1$ og $y_2$ som løsninger av en homogen ligning med konstante koeffisienter; i dette tilfellet er røttene til den karakteristiske ligningen komplekse, og på formen $\lambda = -1 \pm 0.8i$. For å bestemme et andregradspolynom på formen $h(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c = 0$, bruker vi den kjente løsningsformelen

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

som gir at $b = 2$ og

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 - 4c}}{2} = \sqrt{1 - c} = 0.8i$$

så $1 - c = -0.8^2 = -0.64$ eller $c = 1.64$. Dermed er den søkte differensialligningen gitt ved

$$y'' + 2y' + 1.64y = 0$$

Kvotienten $y_1/y_2$ er $\cot 0.8x$, som ikke er konstant, så løsningene er lineært uavhengige, noe som også kan sees utifra Teorem 2 og det faktum at Wronskideterminanten

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ &= e^{-x}\cos 0.8x(-e^{-x}\sin 0.8x + 0.8e^{-x}\cos 0.8x) \\ &\quad - e^{-x}\sin 0.8x(-e^{-x}\cos 0.8x - 0.8e^{-x}\sin 0.8x) \\ &= 0.8e^{-2x}(\cos^2 0.8x + \sin^2 0.8x) = 0.8e^{-2x} \end{aligned}$$

er forskjellig fra 0 for alle $x$.

## Flervalgsoppgaver

$\boxed{1}$ Ligningen $x^2y'' - 5xy' + by = 0$ er en Euler-Cauchy ligning, og vi vet at dermed må 4 og $m$ være røtter i den tilhørende karakteristiske ligningen

$$m^2 - 6m + b = 0$$

Denne har løsninger

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4b}}{2}$$

Siden $\sqrt{6^2 - 4b} > 0$, må vi ha $\sqrt{6^2 - 4b} = 2$ for at $m_1 = 4$ skal kunne være en løsning. Dermed blir den andre løsningen

$$m_2 = m = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

så alternativ **B** er riktig svar.

$\boxed{2}$ Vi begynner med alternativ **A**, og regner ut Wronskideterminanten til funksjonene $y_1 = x$ og $y_2 = x^2$:

$$W(x, x^2) = x \cdot 2x - x^2 \cdot 1 = 2x^2 - x^2 = x^2$$

Vi ser at $W = 0$ for $x = 0$. Anta at dette er løsninger av en ligning på formen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ med $p$ og $q$ kontinuerlige på $(-1, 1)$. Dermed er $W \equiv 0$ på $(-1, 1)$, ifølge Teorem 2. Men $W = x^2 \neq 0$ for $x \neq 0$, så vi har en selvmotsigelse. Dermed er alternativ **A** korrekt.