Fra Edwards & Penney, avsnitt 1.4

9 Svarene blir (etter litt regning): AB er udefinert og

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -22 \end{bmatrix}.$$

20 Det homogene systemet

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 \qquad\qquad + \;\; 7x_5 &= 0 \\ x_3 \qquad - \;\; 2x_5 &= 0 \\ x_4 - 10x_5 &= 0 \end{aligned}$$

kan på matriseform skrives

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ligningssystemet er på redusert echelonform, og x_2 og x_5 er frie variabler. Vi setter $x_2 = s$ og $x_5 = t$ og får

$$\begin{aligned} x_1 &= 3s - 7t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 2t \\ x_4 &= 10t \\ x_5 &= t \end{aligned} \qquad \text{eller} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Løsningen av det gitte homogene systemet er altså

$$\mathbf{x} = s(3,1,0,0,0) + t(-7,0,2,10,1), \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

34 Bruk av den oppgitte formelen gir at $A^2 = 0$ hvis og bare hvis $(a+d)A-(ad-bc)I = 0$. En måte å få til dette på er om koeffisientene foran hvert ledd er 0, altså $a = -d$ og $ad = bc$ (og det er ikke vanskelig å overbevise seg om at dette er den eneste måten). Utifra kravet om at hvert element enten er 1 eller -1, kan vi sette $a = 1$, noe som gir $d = -1$, og $ad = 1 \cdot (-1) = bc$, så $b = -c$. Vi kan f.eks velge $b = 1$ og $c = -1$, som gir følgende matrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Totalt sett er det fire muligheter (to for hver mulig verdi for a), og de tre gjenværende er som følger

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

39 Vi skal vise: Hvis $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ løser den homogene ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så er også $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ en løsning av samme ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

At $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ løser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ betyr at $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Når vi i tillegg bruker den distributive loven for matrisemultiplikasjon, får vi

$$A(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1A\mathbf{x}_1 + c_2A\mathbf{x}_2 = c_1\mathbf{0} + c_2\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Så $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ er også en løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

40 **a)** Vi skal vise: Gitt at $\mathbf{x}_0$ er en løsning av det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og gitt at $\mathbf{x}_1$ er en løsning av det inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så er $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ en løsning av det **samme** inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Ved den distributive loven for matrisemultiplikasjon har vi

$$A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Vi har vist at $A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) = \mathbf{b}$, så $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ løser det inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Vi skal vise : Gitt at $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ løser det inhomogene systemet i **a)**, så er $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ en løsning av det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

så $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$. Differansen mellom to løsninger til det inhomogene systemet er altså en løsning av det homogene systemet.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 1.5

17 Vi skal finne inversen A^{-1} til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi bruker elementære radoperasjoner på 3×6-matrisen $[A|I]$ under, til vi har I i venstre kolonne. Da er 3×3-matrisen i høyre kolonne A^{-1} (jf. EP 1.5, eksempel 7):

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-2)R_2+R_3]{(-3)R_2+R_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[1/4R_3]{(-1)R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-3)R_3+R_1]{(-1)R_3+R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right].$$

Svaret blir

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{22}$ Vi bruker metoden fra EP 1.5, eksempel 7:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 & 8 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

Dermed har vi funnet A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{32}$ Skal vise at om $AB = AC$ og A er invertibel, så er $B = C$. Vi multipliser fra venstre med A^{-1}, og får

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C.$$

Eksamensoppgaver (`http://www.math.ntnu.no/emner/TMA4115/2010v/eksamen/xoppg.pdf`)

A-22 Ingen biler forsvinner, så

$$\begin{aligned} x_1 + 450 &= 610 + x_2 \\ x_2 + 520 &= 480 + x_3 \\ x_3 + 390 &= 600 + x_4 \\ x_4 + 640 &= 310 + x_1. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ -40 \\ 210 \\ -330 \end{bmatrix}.$$

Adderer vi de tre første ligningene til den siste, får vi en ligning med bare 0-er, og følgelig har vi uendelig mange løsninger siden de 3 første allerede er på echelonform. Med $x_4 = t$ som fri variabel får vi generell løsning

$$\begin{aligned} x_4 &= t \\ x_3 &= 210 + x_4 = 210 + t \\ x_2 &= -40 + x_3 = 170 + t \\ x_1 &= 160 + x_2 = 330 + t. \end{aligned}$$

Når $x_4 = 200$, er $t = 200$, og vi får $x_1 = 530$, $x_2 = 370$, $x_3 = 410$.

A-23 La G_n og U_n betegne antallet gifte og ugifte kvinner etter n år. Vi har oppgitt

$$G_n + U_n = 10\,000 \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} G_0 \\ U_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

Ut fra opplysningene i oppgaven kan vi sette opp

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= G_n - 0.3G_n + 0.2U_n = 0.7G_n + 0.2U_n \\ U_{n+1} &= U_n - 0.2U_n + 0.3G_n = 0.3G_n + 0.8U_n. \end{aligned}$$

Dette kan vi skrive som

$$\begin{bmatrix} G_{n+1} \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_n \\ U_n \end{bmatrix}.$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_1 \\ U_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G_2 \\ U_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 5000 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G_3 \\ U_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 \\ 5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 5500 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Flervalgsoppgaver

$\boxed{1}$ Alternativ **B** er det riktig svaret siden

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ En 2×2-matrise $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ er inverterbar hvis og bare hvis $ad - bc \neq 0$, se EP 1.5 Teorem 2. Følgelig vil ikke matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{bmatrix}$$

ha noen invers matrise hvis $-2 - c = 0$, dvs. hvis $c = -2$. Alternativ **B** er altså det riktige.