Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet Institutt for matematiske fag	TMA4110 Matematikk 3 Høst 2010 **Løsningsforslag — Øving 12**

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.1

22 Vi forenkler determinanten $|A - \lambda I|$ ved å trekke rad 2 fra rad 3, altså

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & 3 \\ 6 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & 3 \\ 6 & -7-\lambda & 3 \\ 0 & 1+\lambda & -(1+\lambda) \end{vmatrix}$$

Vi utvikler determinanten etter første kolonne, og utnytter felles faktorer så langt det er mulig[1]:

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= (5-\lambda)\begin{vmatrix} -(7+\lambda) & 3 \\ 1+\lambda & -(1+\lambda) \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ (1+\lambda) & -(1+\lambda) \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)((7+\lambda)(1+\lambda) - 3(1+\lambda)) - 6(6(1+\lambda) - 3(1+\lambda)) \\ &= (5-\lambda)(7+\lambda-3)(1+\lambda) - 18(1+\lambda) \\ &= (5-\lambda)(4+\lambda)(1+\lambda) - 18(1+\lambda) \\ &= (1+\lambda)((4+\lambda)(5-\lambda) - 18) = (1+\lambda)(20+\lambda-\lambda^2-18) \\ &= -(1+\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = -(1+\lambda)^2(\lambda-2) \end{aligned}$$

Altså har matrisen egenverdiene $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -1$.

Vi bestemmer tilhørende egenvektorer ved å løse ligningen

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Etter litt regning fås at λ_1 har tilhørende egenvektorer $\mathbf{x}_1 = t(1,1,1)$, og at λ_2 har de tilhørende egenvektorene $\mathbf{x} = s(-1,0,2) + t(1,1,0)$, $(s,t) \neq (0,0)$. Vektorene $\mathbf{x}_2 = (-1,0,2)$ og $\mathbf{x}_3 = (1,1,0)$ er en basis for egenrommet til λ_2.

26 Karakteristisk ligning blir

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

så

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= (4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)(-3-\lambda) + 18(2-\lambda)(-1-\lambda) \\ &= ((4-\lambda)(-3-\lambda) + 18)(2-\lambda)(-1-\lambda) \\ &= (\lambda^2 - \lambda + 6)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

[1] Et mulig alternativ er å gange ut hele polynomet direkte, finne en av røttene ved prøving/feiling (ofte er iallefall en av røttene et lite, helt tall) og bruke polynomdivisjon for å faktorisere polynomet videre.

Den første faktoren har ingen reelle røtter, så egenverdiene blir $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -1$. Med $\lambda = 2$, får vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

så $x_2 = t$ er en fri variabel, og det er lett å se at $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, så løsningene av $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$ er gitt ved $\mathbf{x} = t(0, 1, 0, 0)$. Dermed er $(0, 1, 0, 0)$ en basis for egenrommet (av dimensjon 1) tilhørende egenverdien $\lambda = 2$. Situasjonen er helt tilsvarende for $\lambda = -1$; $x_3 = s$ blir en fri variabel i systemet $(A + I)\mathbf{x} = 0$, og $x_1 = x_2 = x_4 = 0$. Dermed er $\mathbf{x} = s(0, 0, 1, 0)$, så $(0, 0, 1, 0)$ er en basis for egenrommet tilhørende $\lambda = -1$.

29 **a)** Legg merke til at

$$(A - \lambda I)^T = (A^T - \lambda I).$$

Siden determinanten til en matrise er lik determinanten til dens transponerte, følger det at $|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^T|$ og dermed

$$|A - \lambda I| = |A^T - \lambda I|.$$

Følgelig har matrisene A og A^T den samme karakteristiske ligningen, og derfor også de samme egenverdiene.

b) Se for eksempel på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ med } A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da vil egenvektorene for A være $s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ der $s \neq 0$, mens egenvektorer for A^T er $t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ der $t \neq 0$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.2

15 Egenverdiene og egenvektorer til den gitte matrisa er

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0, \quad \mathbf{x}_1 = (1, 1, 0) \quad \text{(f.eks)} \\ &\lambda_2 = 1, \quad \mathbf{x}_2 = (1, 1, 1) \text{ og } \mathbf{x}_3 = (-1, 0, 2) \quad \text{(f.eks).} \end{aligned}$$

Siden vi har 3 lineært uavhengige egenvektorer, er matrisa diagonaliserbar. Vi kan skrive $P^{-1}AP = D$ der

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

26 Vi ser med en gang at A har to egenverdier $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$, og at tilhørende egenvektorer er

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 1, \mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, 0), \mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 0) \text{ og } \mathbf{x}_3 = (0, 0, 1, 0) \\ &\lambda_2 = 2, \mathbf{x}_4 = (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Altså er $P^{-1}AP = D$ med

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

32 A og B er similære dersom det finnes en matrise P slik at $A = PBP^{-1}$. Det følger at

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= |PBP^{-1} - \lambda I| = |PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}| \\ &= |P(B - \lambda I)P^{-1}| = |P||B - \lambda I|\frac{1}{|P|} \\ &= |B - \lambda I|. \end{aligned}$$

Dette viser at to similære matriser har den samme karakteristiske ligningen, og derfor de samme egenverdiene.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.3

7 Metoden er beskrevet i eksempel 1, side 281 i EP. Ideen er å diagonalisere A og bruke $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$, se øverst side 281. Diagonalisering av A gir $A = PDP^{-1}$ der

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dermed har vi

$$A^5 = PD^5P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 93 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}.$$

28 Matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

er ikke diagonaliserbar fordi den har bare en egenvektor $\mathbf{x} = (1, 0)$.

Om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I + B$$

så følger det at $B^2 = 0$. Det følger at

$$\begin{aligned} A^n = (I+B)^n &= I^n + nI^{n-1}B + \tbinom{n}{2}I^{n-2}B^2 + \cdots + \tbinom{n}{n-2}I^2B^{n-2} + nIB^{n-1} + B^n \\ &= I + nB \\ &= \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har her brukt at formelen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

som holder for $a, b \in \mathbb{R}$, også kan brukes for å regne ut potenser av en sum av to matriser C, D, forutsatt at $CD = DC$ (vi sier gjerne at C og D *kommuterer*). Altså er

$$(C+D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^{n-k} D^k$$

Dersom $C = I$, så er kravet automatisk oppfyllt for alle matriser D, så

$$(I+D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k.$$

29 Egenverdiene til A er de verdiene av λ slik at $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi finner denne determinanten:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} p-\lambda & 1-q \\ 1-p & q-\lambda \end{vmatrix} = (p-\lambda)(q-\lambda)-(1-q)(1-p) = \lambda^2-(p+q)\lambda+p+q-1.$$

Det er lett å se at $\lambda_1 = 1$ løser denne ligningen. Dersom vi setter inn $\lambda_2 = p+q-1$ får vi

$$(p+q-1)^2-(p+q)(p+q-1)+p+q-1 = (p+q)^2-2(p+q)+1-(p+q)^2+(p+q)+p+q-1 = 0.$$

Så $\lambda_2 = p+q-1$ løser også ligningen.

Eksamensoppgaver

A-51 Vi har

$$A^2 - 3A + 2I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(A-3I) = -2I \quad \Leftrightarrow \quad A(-\tfrac{1}{2}A + \tfrac{3}{2}I) = I.$$

Det viser at A er inverterbar, og at $A^{-1} = \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A$.

Merk at for en kvadratisk matrise A gjelder at hvis $AB = I$, så er A er inverterbar og $A^{-1} = B$. Det er altså ikke nødvendig å sjekke at også $BA = I$ (selv om det er greit i denne oppgaven). Det står som oppgaver i EP, 1.5.45 og 2.3.31 (2.3.31 er enklest).

Aug. 2002, oppg. 6 **a)** Vi finner

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} (-2-\lambda) & 1 \\ 2 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda+3).$$

Egenverdiene er altså $\lambda = 0$ og $\lambda = -3$. For $\lambda = 0$ får vi $A - \lambda I \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. En tilhørende egenvektor er derfor $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$.

For $\lambda = -3$ får vi $A - \lambda I \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. En tilhørende egenvektor er derfor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Dersom $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, er $kA\mathbf{v} = Ak\mathbf{v} = k\lambda\mathbf{v}$. Så dersom λ_i, $1 \leq i \leq N$ er egenverdiene til A, er $k\lambda_i$,$1 \leq i \leq N$ egenverdiene til kA. Egenvektorene til kA blir de samme som for A.

b) For saltmengdene $x_1(t)$ og $x_2(t)$ finner vi differensiallikningssystemet

$$x_1' = \frac{4}{200}x_2 - \frac{4}{100}x_1$$
$$x_2' = \frac{4}{100}x_1 - \frac{4}{200}x_2$$

altså

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -\frac{4}{100} & \frac{4}{200} \\ \frac{4}{100} & -\frac{4}{200} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \frac{1}{50}A\mathbf{x}$$

der $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t))$ og A er matrisen fra punkt **a)**. Egenverdiene for $\frac{1}{50}A$ er da $\mu_1 = 0$ og $\mu_2 = \frac{-3}{50} = -0.06$, med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ og $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$. Generell løsning av systemet blir dermed

$$\mathbf{x} = C_1\mathbf{v}_1 e^{\mu_1 t} + C_2\mathbf{v}_2 e^{\mu_2 t} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.06t}.$$

For $t = 0$ har vi $x_1 = 0$ og $x_2 = 30$. Dette gir $C_1 + C_2 = 0$, $2C_1 - C_2 = 30$, altså $C_1 = 10$, $C_2 = 10$. Løsningen blir da

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} e^{-0.06t}.$$