Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Nils A. Baas 73 59 35 19
Harald E. Krogstad 73 59 35 36

EKSAMEN I FAG SIF5010 MATEMATIKK 3

Mandag 25. mai 1998
Tid: 0900-1400

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, tillatt.
- Karl Rottmann: Matematisk formelsamling

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

Oppgave 1

a) Finn den generelle løsningen av

$$y'' - 2y' + 5y = \sin x$$

b) Finn en 3. ordens lineær homogen differensialligning med konstante koeffisienter som har

$$e^x, xe^x \text{ og } e^{2x}$$

som løsninger.

Oppgave 2
Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 3 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Finn en basis for vektorrommene $\mathrm{Row}(A)$ (radrommet til A) og $\mathrm{Col}(A)$ (kolonnerommet til A) ved å bringe matrisen over på echelon form.

b) Bestem videre en basis for $\mathrm{Null}(A)$ (nullrommet til A.)

c) Bestem uten ny regning en basis for $\mathrm{Null}(A)^{\perp}$.

d) For hvilke α har ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

løsninger?

Oppgave 3
Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut egenverdiene og egenvektorene til A. (Hint: 1 er en egenverdi til A).

b) Bestem en matrise S og en diagonalmatrise D slik at

$$S^{-1}AS = D.$$

c) Kan en i b) finne en matrise S som er ortogonal? I såfall finn en slik.

d) Finn den generelle løsningen av systemet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e) Sett

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Regn ut P^{-1}.

f) Finn den generelle løsningen av systemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x' & + & y' & + & z' & = & 4x & + & 4y & + & 4z \\ x' & & & + & z' & = & 3x & + & 2y & + & 3z \\ & & y' & - & z' & = & & & y & - & z \end{array}$$

Oppgave 4

I byen Patos blir hvert år 30% av de gifte kvinnene skilt og 20% av de ugifte blir gift. I byen er det i øyeblikket 8000 gifte kvinner og 2000 ugifte. Anta at det totale kvinneantallet er konstant. Ifølge lokale lover kan en kvinne kun gifte eller skille seg en gang i året.

Vis hvordan antallet gifte og ugifte kvinner etter n år bestemmer antallet av gifte og ugifte kvinner etter $(n+1)$ år. Bruk dette til å regne ut hvor mange gifte og ugifte kvinner det er etter 1, 2 og 3 år.