Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 2

Fra Kreyszig (9. utgave) avsnitt 2.1

4 Gitt differensialligningen $y'' - 6y' + 9y = 0$ med initialbetingelser $y(0) = -1.4$ og $y'(0) = 4.6$. Vi skal vise ved innsetting at $y_1 = e^{3x}$ og $y_2 = xe^{3x}$ er løsninger av differensialligningen:

$$y_1'' - 6y_1' + 9y_1 = 9e^{3x} - 18e^{3x} + 9e^{3x} = 0$$
$$y_2'' - 6y_2' + 9y_1 = (6e^{3x} + 9xe^{3x}) - 6(e^{3x} + 3xe^{3x}) + 9xe^{3x} = 0.$$

Løsningene y_1 og y_2 er lineært uavhengige siden kvotienten y_1/y_2 ikke er konstant ($y_1/y_2 = e^{3x}/xe^{3x} = 1/x$). Da er $\{y_1, y_2\}$ en basis av løsninger. En generell løsning er

$$y = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$$

der A og B er vilkårlige konstanter. Derivasjon gir

$$y' = 3Ae^{3x} + B(e^{3x} + 3xe^{3x})$$

og vi bestemmer konstantene A og B ved å bruke initialbetingelsene:

$$-1.4 = y(0) = A \quad \text{og} \quad 4.6 = y'(0) = -4.2 + B.$$

Den søkte løsningen er

$$y = -1.4e^{3x} + 8.8xe^{3x}.$$

10 Funksjonene $y_1 = \cos^2 x$ og $y_2 = \sin^2 x$ er lineært uavhengige siden

$$\frac{y_1}{y_2} = \cot^2 x \qquad \text{ikke er konstant på } I.$$

Det kan vi overbevise oss om ved f.eks. å regne ut $\cot^2 x$ i to punkt $x_1 = \pi/4$ og $x_2 = \pi/2$.

12 Funksjonene $y_1 = x - 2$ og $y_2 = x + 2$ er lineært uavhengige på intervallet $I = (-2, 2)$ siden

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x-2}{x+2} \qquad \text{ikke er konstant på } I.$$

Det kan vi overbevise oss om ved f.eks. å sjekke at den deriverte av y_1/y_2 ikke er identisk lik null. Her er $(y_1/y_2)' = 4/(x+2)^2$ så y_2/y_2 er strengt voksende på hele intervallet I.

14 Funksjonene $y_1 = 0$ og $y_2 = \sinh \pi x$ er lineært avhengige (proporsjonale) på ethvert åpent intervall, spesielt på det oppgitte intervallet $(0, \infty)$, siden $y_1(x) = 0 \cdot y_2(x)$ for alle x.

$\boxed{20}$ Vi skriver først ligningen $xy'' + 2y' + xy = 0$ på standardform, ved å dividere med x:

$$y'' + 2x^{-1}y' + y = 0 \qquad (1)$$

Dermed er $p(x) = 2x^{-1}$ og $q(x) = 1$ i bokens notasjon.

Innsetting av $y_2 = uy_1 = ux^{-1}\cos x$ i (1) gir (se side 51 for utledning)

$$U = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{\cos^2 x}e^{-\int 2x^{-1}\,\mathrm{d}x} = \frac{x^2e^{-2\ln|x|}}{\cos^2 x} = \frac{x^2}{x^2\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

der $U' = u$. Dermed er den andre løsningen gitt ved

$$y_2 = uy_1 = \frac{\cos x}{x}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

Merk at integrasjonskonstanter er uviktige i denne sammenhengen. (Hvorfor? Hva skjer om vi bytter ut $e^{-2\ln|x|}$ med $e^{-2\ln|x|+c_1}$, og $u = \tan x$ med $\tan x + c_2$ i utregningene over?).

Fra Kreyszig (9. utgave) avsnitt 2.2

$\boxed{2}$ Vi søker en generell løsning av differensialligningen $10y'' - 7y' + 1.2y = 0$. Dens karakteristiske ligning er $10\lambda^2 - 7\lambda + 1.2 = 0$. Vi løser denne først

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 10\cdot 1.2}}{20} = \frac{7\pm 1}{20}.$$

Den karakteristiske ligningen har altså røttene $\lambda_1 = \frac{2}{5}$ og $\lambda_2 = \frac{3}{10}$. En basis av løsninger er da $y_1 = e^{0.4x}$ og $y_2 = e^{0.3x}$, og en generell løsning er

$$y = c_1e^{0.4x} + c_2e^{0.3x}.$$

Kontroll:

$$\begin{aligned}
&y' = 0.4c_1e^{0.4x} + 0.3c_2e^{0.3x},\ y'' = 0.16c_1e^{0.4x} + 0.09c_2e^{0.3x}\\
&10y'' - 7y' + 1.2y\\
&\quad = \big(1.6c_1 - 2.8 + 1.2\big)e^{0.4x}\big(0.9 - 2.1 + 1.2\big)e^{0.3x} = 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Vi skal finne en generell løsning av differensialligningen $y'' + 2y' + 5y = 0$, og løser først den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$:

$$\lambda = \frac{-2\pm\sqrt{2^2 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{-2\pm 4i}{2} = -1\pm 2i.$$

Den karakteristiske ligningen har altså komplekse røtter $\lambda_1 = -1+2i$ og $\lambda_2 = -1-2i$. En basis av løsninger er da $y_1 = e^{-x}\cos 2x$ og $y_2 = e^{-x}\sin 2x$, og en generell løsning er

$$y = Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Kontroll: Vi deriverer (og trekker sammen) og setter så inn i ligningens venstreside:

$$\begin{aligned}
y' &= e^{-x}[(-A+2B)\cos 2x + (-2A-B)\sin 2x]\\
y'' &= e^{-x}[(-3A-4B)\cos 2x + (4A-3B)\sin 2x]\\
y'' + 2y' + 5y &= e^{-x}\{[(-3A-4B) + 2(-A+2B) + 5A]\cos 2x\\
&\qquad + [(4A-3B) + 2(-2A-B) + 5B]\sin 2x\} = 0.
\end{aligned}$$

9 Vi skal finne en generell løsning av differensialligningen $y'' - 2y' - 5.25y = 0$, og løser først den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 2\lambda - 5.25 = 0$:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-5.25)}}{2} = \frac{2 \pm 5}{2} = 1 \pm 2.5\,.$$

Den karakteristiske ligningen har altså reelle distinkte røtter $\lambda_1 = 3.5$ og $\lambda_2 = -1.5$. En basis av løsninger er $y_1 = e^{3.5x}$ og $y_2 = e^{-1.5x}$, og en generell løsning er

$$y = c_1 e^{3.5x} + c_2 e^{-1.5x}.$$

Kontroll:

$$y' = 3.5c_1e^{3.5x} - 1.5c_2e^{-1.5x},\ y'' = 12.25c_1e^{3.5x} + 2.25c_2e^{-1.5x}$$
$$y'' - 2y' - 5.25y = (12.25 - 7 - 5.25)c_1e^{3.5x} + (2.25 + 3 - 5.25)c_2e^{-1.5x} = 0.$$

18 Vi kan skrive $1 = e^{0x}$. Vi søker derfor en differensialligning $y'' + ay' + by = 0$ med basis $y_1 = e^{0x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ må da ha løsninger $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = -3$, og den karakteristiske ligningen må følgelig kunne skrives

$$(\lambda - 0)(\lambda + 3) = 0 \qquad \text{dvs.} \qquad \lambda^2 + 3\lambda = 0.$$

En differensialligning med denne karakteristiske ligningen er

$$y'' + 3\,y' = 0.$$

20 Vi søker en differensialligning $y''+ay'+by = 0$ med basis $y_1 = e^{(-1+i)x}$, $y_2 = e^{(-1-i)x}$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ må da ha løsninger $\lambda_1 = -1 + i$ og $\lambda_2 = -1 - i$, og den karakteristiske ligningen må følgelig kunne skrives

$$(\lambda - (-1 + i))(\lambda - (-1 - i)) = 0 \qquad \text{dvs.} \qquad (\lambda + 1 - i)(\lambda + 1 + i) = 0.$$

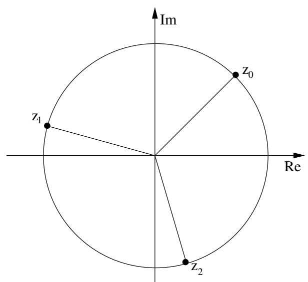
Vi får $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. En differensialligning med denne karakteristiske ligningen er

$$y'' + 2\,y' + 2\,y = 0.$$

Eksamensoppgaver

A-2 **a)** Vi har $z^3 = -1 + i = \sqrt{2}\,e^{i(3\pi/4)}$ slik at $z_k = \sqrt[6]{2}\,e^{i(3\pi/4+2k\pi)/3}$, $k = 0,\ 1,\ 2$. Setter vi inn for k, får vi

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\,e^{i\pi/4}$$
$$z_1 = \sqrt[6]{2}\,e^{i(11\pi/12)}$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2}\,e^{i(19\pi/12)}.$$



b) Av figuren ser vi at z_1 er løsningen i andre kvadrant, dvs. $w = \sqrt[6]{2}\,e^{i(11\pi/12)}$. For at w^n skal være reell, må argumentet være av formen $2k\pi$ (w^n reell og positiv) eller $\pi + 2k\pi$ (w^n reell og negativ) for et heltall k. Vi kan for eksempel bruke $n = 12$. Da får vi $w^n = w^{12} = 2^2\,e^{11\pi i} = 4e^{i\pi} = -4$.

Flervalgsoppgaver

$\boxed{1}$ Vi skriver

$$z = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{-1+i}$$

på formen $a+ib$, ved å gange med $\overline{-1+i} = -1-i$ over og under brøkstreken:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1))(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} \\ &= \frac{1}{2}\Big(-1-\sqrt{3}-i(\sqrt{3}-1)-i-i\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)\Big) \\ &= \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1-i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Dermed er $|z| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$, så

$$z = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Siden både realdelen og imaginærdelen har negativt fortegn, må tallet befinne seg i tredje kvadrant. Det korrekte svaralternativet er dermed **B**, noe som også kan sjekkes ved regning.

$\boxed{2}$ Vi lar $y = xe^x$. Da er $y' = e^x + xe^x$ og $y'' = 2e^x + xe^x$. Vi setter dette inn i differensialligningen og får:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + ay &= 2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + axe^x \\ &= (a-1)xe^x \end{aligned}$$

Dette må være lik 0. Da $xe^x = 0$ kun for $x = 0$ må vi ha at $a - 1 = 0$ som gir $a = 1$.

Riktig svar er altså **B**.

Alternativ løsning: For at xe^x skal være en løsning, må den karakteristiske ligningen ha dobbelrot. Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 - 2\lambda + a = 0$ med løsninger $\lambda = 1 \pm \sqrt{1-a}$. Denne har dobbelrot dersom $a = 1$, så svaret blir **B**.