Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen:
Torbjørn Helvik 73 55 02 87

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3

Bokmål
Torsdag 1. desember 2005
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler (kode C): Bestemt, enkel kalkulator (HP30S).
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Sensuren faller 22. desember 2005

Oppgave 1

Finn alle komplekse tall $z = x + iy$ som oppfyller ligningen $|z - 2i| = |z - 3i|$.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y' + \frac{3x}{x^2+1}y = \frac{6x}{x^2+1}, \qquad y(0) = 3.$$

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y'' - 5y' + 6y = 36x + 10\sin x.$$

c) Løs initialverdiproblemet

$$x^2y'' + 8xy' + 12y = 0, \quad x > 0, \qquad y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$$

Oppgave 3

Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b) Finn basiser for hvert av rommene $\mathrm{Row}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$ og $\mathrm{Row}(A)^\perp$.

Oppgave 4

La underrommet $V \subseteq \mathbb{R}^3$ være utspent av vektorene

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ er ortogonale. Finn en tredje vektor $\mathbf{x}_3$ slik at $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ blir en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$.

Finn også den ortogonale projeksjonen av vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ ned i V.

Oppgave 5

Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Bestem egenverdiene og tilhørende egenvektorer til A.

b) Finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$. Begrunn, uten regning, at P kan velges slik at $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$.

c) Løs følgende system av differensialligninger:

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 2y_2, \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2, \\ y_3' &= 5y_3, \end{aligned}$$

når $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$ og $y_3(0) = 3$.

Oppgave 6 Eieren av bilutleiefirmaet "Lei-et-Vrak" observerer at av de bilene som ikke er utleid i starten av en uke, er 30% fortsatt ikke utleid i starten av uka etter. Videre er 60% av bilene som er utleid i starten av en uke fortsatt utleid i starten av uka etter.

I det lange løp, hvor stor andel av bilene til "Lei-et-Vrak" vil være utleid i starten av en uke?

Oppgave 7

La A og B være to $n \times n$ matriser.

Vis at dersom 0 er en egenverdi for AB, så er 0 en egenverdi for BA.

Vis at dersom B er inverterbar og λ er en egenverdi for AB, så er λ en egenverdi for BA.