Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag, telefon 73 59 35 21

EKSAMEN I FAG SIF5010 MATEMATIKK 3

Lørdag 22. mai 1999
Tid: 0900-1400

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, tillatt.
- Karl Rottmann: Matematisk Formelsamling.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

Oppgave 1

a) Finn tredjerøttene til -8. Skriv røttene på formen $a + b\,i$ der a og b er reelle, og tegn røttene i det komplekse plan.

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y^{(4)} - y^{(3)} + 8y' - 8y = e^x\,.$$

(Observer at $r = 1$ er en rot i den karakteristiske ligningen.)

c) Finn den generelle løsningen av

$$y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}, \qquad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

Oppgave 2 Gitt initialverdiproblemet

$$y' = x + \sqrt{y}, \qquad y(\tfrac{3}{2}) = 1.$$

Tilnærm $y(\frac{5}{2})$ ved hjelp av Eulers metode med skrittlengde $h = \frac{1}{2}$.

Oppgave 3 La α og β være reelle tall, og sett

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

a) Bring totalmatrisen (den augmenterte matrisen) $[A\ \mathbf{b}]$ til ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ på formen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & ? & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ? \end{bmatrix}$$

ved hjelp av elementære radoperasjoner, og bestem de to manglende elementene.
Hva blir den reduserte echelon-formen (reduserte trappeformen) til **koeffisientmatrisen** A for forskjellige verdier av α?

b) For hvilke α og β har ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- nøyaktig én løsning
- ingen løsning
- uendelig mange løsninger?

c) Løs $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for $\alpha = 0$ og $\beta = 3$.

d) La $\alpha = 0$. Finn en basis for $\mathrm{Null}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$ og $\mathrm{Null}(A)^{\perp}$.

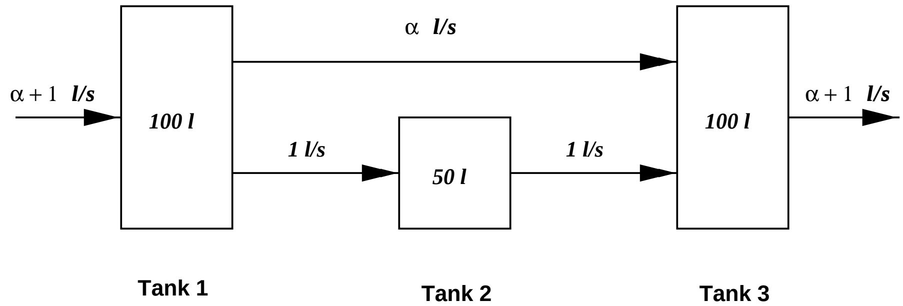
Oppgave 4 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer.

b) Finn en ortogonal matrise P slik at $D = P^T A P$ blir en diagonalmatrise. Angi D.

Oppgave 5 Figuren viser tre tanker som inneholder en oppløsning av salt i vann.



Inn i tank 1 strømmer det rent vann med en rate $\alpha + 1$ liter pr. sekund ($\alpha > 0$). Mellom tankene og ut av tank 3 strømmer det saltoppløsning som vist på figuren. Saltet holdes jevnt fordelt i hver tank ved omrøring. Ved tiden $t = 0$ er det 20 gram salt i hver av tankene 1 og 3, mens tank 2 inneholder rent vann. Finn saltmengdene $x_1(t)$, $x_2(t)$ og $x_3(t)$ i tank 1, 2 og 3 for alle $t \geq 0$ når

a) $\alpha = 2$

b) $\alpha = 3$.

Oppgave 6 La A være en $m \times n$–matrise og la B være en $n \times p$–matrise.

Vis at dersom $AB = 0$, så er $\mathrm{Col}(B)$ inneholdt i $\mathrm{Null}(A)$.