Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø   73 59 35 42/20

EKSAMEN I SIF5009/SIF5010 Matematikk 3

Fredag 10. august 2001
tid: 09.00 – 14.00

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator med tomt minne
- Karl Rottmann: Matematisk Formelsamling

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulatoren godtas ikke som fullgodt svar.

Sensuren faller 1. september

Oppgave 1

Finn alle komplekse tall som oppfyller ligningen $z^5 + 16z = 0$. Skriv løsningene på formen $a + ib$ der a og b er reelle. Tegn løsningene i det komplekse plan.

Oppgave 2

Gitt initialverdiproblemet

$$(*) \qquad y' - 2xy = x, \qquad y(1) = 0.$$

a) Finn løsningen $y = y(x)$ av $(*)$.

b) Tilnærm $y(\frac{3}{2})$ ved hjelp av Eulers metode med skrittlengde $h = \frac{1}{4}$.

Oppgave 3

a) Løs initialverdiproblemet $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

b) Finn den generelle løsningen av $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}, \quad 0 < x < \pi.$

Oppgave 4

Løs systemet

$$\frac{dx}{dt} = -7x + 2y, \qquad \frac{dy}{dt} = -6x$$

med initialbetingelsen $x(0) = y(0) = 1.$

Oppgave 5

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Finn den reduserte trappeformen (reduserte echelonformen) til A.

b) Finn en basis for $\mathrm{Row}(A)$, $\mathrm{Null}(A)$ og $\mathrm{Col}(A)$.

c) Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Col}(A)$.

Oppgave 6

Begrunn at for $n \times n$-matriser gjelder

$$(*) \qquad AB = AC \quad \text{impliserer} \quad B = C$$

dersom $\det(A) \neq 0$.

Finn 2×2-matriser $A \neq O$, B og C slik at $(*)$ ikke gjelder.

Oppgave 7

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) I byen Etos blir hvert år 30% av de gifte mennene skilt og 20% av de ugifte blir gift. Anta at det totale antall menn er konstant. I følge lokale lover kan en mann kun gifte eller skille seg en gang i året.

Hva blir fordelingen av gifte og ugifte menn på lang sikt når det i øyeblikket er 8000 gifte og 2000 ugifte menn i byen.

Oppgave 8

Vis at dersom A er en diagonaliserbar $n \times n$-matrise som oppfyller $A^k = O$ for en $k \geq 1$, da er $A = O$.

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø 73 59 35 42/20

EKSAMEN I SIF5009/SIF5010 Matematikk 3

Fredag 10. august 2001
tid: 09.00 – 14.00

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator med tomt minne
- Karl Rottmann: Matematisk Formelsamling

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulatoren godtas ikke som fullgodt svar.

Sensuren faller 1. september

Oppgave 1

Finn alle komplekse tall som oppfyller ligningen $z^5 + 16z = 0$. Skriv løsningene på formen $a + ib$ der a og b er reelle. Tegn løsningene i det komplekse plan.

Oppgave 2

Gitt initialverdiproblemet

$$(*) \qquad y' - 2xy = x, \qquad y(1) = 0.$$

a) Finn løsningen $y = y(x)$ av $(*)$.

b) Tilnærm $y(\frac{3}{2})$ ved hjelp av Eulers metode med skrittlengde $h = \frac{1}{4}$.

Oppgave 3

a) Løs initialverdiproblemet $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

b) Finn den generelle løsningen av $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}, \quad 0 < x < \pi.$

Oppgave 4

Løs systemet

$$\frac{dx}{dt} = -7x + 2y, \qquad \frac{dy}{dt} = -6x$$

med initialbetingelsen $x(0) = y(0) = 1$.

Oppgave 5

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Finn den reduserte trappeformen (reduserte echelonformen) til A.

b) Finn en basis for $\mathrm{Row}(A)$, $\mathrm{Null}(A)$ og $\mathrm{Col}(A)$.

c) Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Col}(A)$.

Oppgave 6

Begrunn at for $n \times n$-matriser gjelder

$$(*) \qquad AB = AC \quad \text{impliserer} \quad B = C$$

dersom $\det(A) \neq 0$.

Finn 2×2-matriser $A \neq O$, B og C slik at $(*)$ ikke gjelder.

Oppgave 7

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) I byen Etos blir hvert år 30% av de gifte mennene skilt og 20% av de ugifte blir gift. Anta at det totale antall menn er konstant. I følge lokale lover kan en mann kun gifte eller skille seg en gang i året.

Hva blir fordelingen av gifte og ugifte menn på lang sikt når det i øyeblikket er 8000 gifte og 2000 ugifte menn i byen.

Oppgave 8

Vis at dersom A er en diagonaliserbar $n \times n$-matrise som oppfyller $A^k = O$ for en $k \geq 1$, da er $A = O$.