Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 995 59 273
Cathrine Jensen tlf. 454 42 047

EKSAMEN I TMA4115 MATEMATIKK 3

Bokmål
Onsdag 7. juni 2006
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 28. juni

Alle svar (unntatt på oppgave 4) skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 Regn ut

$$w = \left(\sqrt{3} + i\right)^4.$$

Finn den løsningen av ligningen $z^4 = w$ som ligger i *andre* kvadrant i det komplekse plan.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 6y' + 10y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

b) Finn generell løsning av differensialligningen

$$y'' - 3y' + 2y = e^x + 10 \sin x.$$

c) Anta at p og q er funksjoner slik at differensialligningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad x > 0$$

har en basis $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 \ln x$ av løsninger. Finn generell løsning av ligningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = x, \qquad x > 0.$$

Oppgave 3 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og angi en basis for $\mathrm{Null}(A)$.

b) Finn en basis for hvert av rommene $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Row}(A)$ og $\mathrm{Row}(A)^{\perp}$.

c) Vis at vektoren $\mathbf{v} = (2, 1, -1, 0)$ er i det ortogonale komplementet $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$. Er $\{\mathbf{v}\}$ en basis for $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$?

Oppgave 4 *Flervalgsoppgave*
Svar uten begrunnelse ved å velge ett alternativ. Riktig svar: full score, galt svar: null score.

a) Bestem minste kvadraters løsning $(\bar{x}, \bar{y})$ for ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ x - y &= 1 \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

A: $(0, 1)$ **B:** $(1/2, 3/2)$ **C:** $(1, 1)$ **D:** $(3/2, 1/2)$

b) For hvilke reelle tall α, β er P en ortogonal matrise med determinant lik 1?

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha & -1 & -1 & \beta \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \beta \end{bmatrix}$$

A: $\alpha = 2$, $\beta = 0$ **B:** $\alpha = 1$, $\beta = -1$ **C:** $\alpha = -1$, $\beta = 1$ **D:** $\alpha = 0$, $\beta = 2$

Oppgave 5 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Vis at A har egenverdiene 0 og 1. Finn alle egenvektorene til A.

b) Angi en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at

$$P^{-1}AP = D.$$

Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 - 2y_3 \\ y_2' &= 2y_1 \phantom{{}- y_2} - 2y_3 \\ y_3' &= 2y_1 - y_2 - y_3 \end{aligned}$$

med initialbetingelser $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ og $y_3(0) = 2$.

c) En kvadratisk matrise B sies å være *idempotent* hvis $B^2 = B$. Påvis at matrisen A er idempotent. Vis generelt at hvis λ er egenverdi for en idempotent matrise, så er $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.