Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen, tlf. 73 59 35 28
Trond Varslot, tlf. 73 59 16 50

EKSAMEN I FAG SIF5010 MATEMATIKK 3

30. mai 2003
Tid: 09:00–14:00
Bokmål

Hjelpemidler (kode C):
Enkel kalkulator (HP30S)
Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller 4. juli 2003.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

Finn alle komplekse tall z slik at

$$z^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i,$$

og vis på en figur hvordan de ligger i det komplekse plan.

Oppgave 2

Finn alle reelle tall x, y slik at det komplekse tallet $z = x + iy$ oppfyller

$$\mathrm{Re}(z+1) = |z-1|.$$

Hva slags kurve utgjør løsningsmengden?

Oppgave 3

Gitt initialverdiproblemet

$$(*) \quad y' - 2xy = 1,\ y(0) = 0.$$

a) Bruk Eulers metode med skrittlengde 0,1 til å finne en tilnærmet verdi av løsningen for $x = 0{,}2$.

b) Finn et uttrykk for løsningen av $(*)$. Bruk dette sammen med svaret i a) til å finne en tilnærmet verdi av integralet

$$\int_0^{0{,}2} e^{-t^2}\,dt.$$

Oppgave 4

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x},\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = 0.$$

b) Finn generell løsning av differensialligningen

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x},\ x > 0.$$

c) Bevegelsen til et mekanisk system er gitt ved differensialligningen $y'' + 9y = \sin \omega t$. For hvilke $\omega > 0$ vil løsningen $y(t)$ være ubegrenset?

Oppgave 5

Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$ og vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ \beta \end{bmatrix}$ der α, $\beta \in \mathbf{R}$.

a) For hvilke verdier av α og β har ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

1) nøyaktig én løsning?
2) uendelig mange løsninger?
3) ingen løsninger?

Løs ligningssystemet i tilfelle 2).

b) Finn en basis for $\mathrm{Null}(A), \mathrm{Col}(A)$ og $\mathrm{Row}(A)$ for $\alpha = 1$.

Oppgave 6

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn en matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{\mathrm{T}}$.

c) Løs differensialligningssystemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Oppgave 7

Vis at hvis P er en ortogonal $n \times n$-matrise, så er $|P\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Oppgave 8

Fra byen Kapitol flytter hvert år 40% av innbyggerne ut på landet (og 60% forblir i byen), mens 20% av beboerne på landet flytter inn til byen (og 80% forblir på landet).

I øyeblikket bor det 5 millioner i byen og 4 millioner på landet. (Vi ser bort fra effektene av fødsler, dødsfall, immigrasjon/emigrasjon osv.)

a) La x_k være folketallet i byen og y_k folketallet på landet etter k år, $k = 0, 1, 2, \cdots$. Uttrykk folketallet i byen og på landet etter $k+1$ år ved x_k og y_k. Finn en formel for folketallet i byen og på landet etter n år. Hva blir befolkningsfordelingen på lang sikt, dvs. når $n \to \infty$?

b) Vi bruker nå en kontinuerlig modell. La $y_1(t)$ være folketallet i byen og $y_2(t)$ folketallet på landet ved tiden t, og anta at $y_1(t)$ og $y_2(t)$ er deriverbare funksjoner av t. La $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$. Finn en matrise B slik at

$$\mathbf{y}' = B\mathbf{y},$$

og bestem den løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsen når $t = 0$. Hva gir denne modellen at befolkningsfordelingen blir på lang sikt, dvs. når $t \to \infty$?