Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 7

Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.1

5

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-8) - 4 \cdot 11 = -56 - 44 = -100.$$

17 Ved å bruke Cramers regel får vi

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2 \qquad og \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{9}{3} = -\frac{3}{1} = -3$$

31 Vi skal vise at $(AB)^T = B^T A^T$ for A og B vilkårlige 2×2-matriser. La

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}.$$

Da er

$$(AB)^T = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \right)^T = \left(\begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ca' + dc' \\ ab' + bd' & cb' + dd' \end{bmatrix}$$

og

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'a + c'b & a'c + c'd \\ b'a + d'b & b'c + d'd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ca' + dc' \\ ab' + bd' & cb' + dd' \end{bmatrix}$$

Alternativ: I akkurat dette beviset, er det egentlig ingen grunn til å begrense oss til 2×2-matriser, så la $A = [A_{ij}]$ og $B = [B_{ij}]$ $(1 \leq i, j \leq n)$ være vilkårlige $n \times n$-matriser (med elementer $A_{ij}, B_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, henholdsvis). Vi ser på element (i, j) i produktet, som vi skriver $(AB)_{ij}$. Merk at $A^T_{ij} = A_{ji}$ og tilsvarende $(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji}$. Siden

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

så er

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} B^T_{ik} A^T_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$$

Dermed er $(AB)^T = B^T A^T$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.2

8 Siden den midterste kolonnen har to elementer lik 0, vil ekspansjon langs denne kun kreve utregning av èn 2×2-determinant. Med andre ord, determinanten er simpelthen lik kofaktoren A_{11} ganget med -3.

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 9 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3(5 \cdot 5 - 4 \cdot 6) = -3 \cdot 1 = -3$$

15 Her er det faktisk flere metoder som er optimale. En mulighet er følgende:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 0 & 10 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{0+0} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 8 \\ 0 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+0} \cdot 6 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = -6 \cdot 35 = -210$$

Et mulig alternativ er

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 0 & 10 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 10 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot 6 \cdot (-1)^{0+0} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = -6 \cdot 35 = -210$$

22 Vi skal regne ut

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & -5 & 12 \end{vmatrix}$$

Vi ser at ved å legge til 2 ganger kolonne 1 til kolonne 2, så blir de to første elementene i kolonne 2 lik 0. Determinanten forblir uendret, så

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & -5 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 12 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 5 = 7$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.3

9 Gausseliminasjon kombinert med teorem 1 og egenskap 6 fra avsnitt 2.2 gir

$$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & 11 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 20 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -39 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-39) = 78$$

26 Fra $A^T = A^{-1}$ får vi

$$|A| = |A^T| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|},$$

og $|A|^2 = 1$, som gir $|A| = \pm 1$.

27 La $A = P^{-1}BP$, da vil i følge produktsetningen for determinanter

$$\det A = \det P^{-1}BP = \det P^{-1} \cdot \det B \cdot \det P = \frac{1}{\det P} \cdot \det B \cdot \det P = \det B.$$

Eksamensoppgaver

A-49 Siden $A^2 = A$ og, generelt, $\det AB = \det A \det B$, følger $(\det A)^2 = \det A$. Altså er $(\det A)^2 - \det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \det A \cdot (\det A - 1) = 0$, det viser at $\det A$ er 0 eller 1.

Hvis $\det A = 1$ har A en invers matrise, og vi kan multiplisere $A^2 = A$ med A^{-1}, det gir

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}A \quad \Leftrightarrow \quad A = I.$$

Hvis $\det A = 0$ kan vi *ikke* slutte at A er nullmatrisen (når $n \geq 2$). Det viser moteksempelet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{som oppfyller } A^2 = A \text{ og } \det A = 0.$$

Merk at det her er nok å finne et moteksempel for én verdi av n. Vi har her funnet et moteksempel for $n = 2$, men vi ser lett at en tilsvarende matrise for $n > 2$ har tilsvarende egenskap.

Flervalgsoppgaver

1 Gauss-Jordan eliminasjon gir

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_1+R_2,\,-R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)R_2+R_1,\,2R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Riktig svar er altså **D**.

2 Vi beregner determinanten til matrisen

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 4 \\ k & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & k+1 & 3 \\ 0 & k+1 & 5-k \end{vmatrix} = (k+1)(5-k) - 3(k+1) = -(k+1)(k-2)$$

Dermed er matrisen ikke inverterbar for $k = 2$ og $k = -1$, altså er alternativ **D** korrekt.