Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 10 – Veiledning uke 44

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.4

RAD OG KOLONNEROM Finn en basis for både radrommet Row A og kolonnerommet Col A til matrisen A under.

$\boxed{7}$ $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 16 \\ 1 & 3 & 3 & 13 \\ 2 & 5 & 4 & 23 \end{bmatrix}$$

BASISER MED SPESIFISERTE VEKTORER La $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en basis for et underrom $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Man kan finne en basis for $\mathbb{R}^n$ som inneholder S ved å bruke metoden fra eksempel 5 på vektorene

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$$

(der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ er standardbasisen for $\mathbb{R}^n$). Gjør dette i oppgavene under.

$\boxed{17}$ Finn en basis T for $\mathbb{R}^3$ som inneholder vektorene $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2)$ og $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 3)$.

$\boxed{19}$ Finn en basis T for $\mathbb{R}^4$ som inneholder vektorene $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$ og $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 3, 3)$.

Gitt et homogent system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ av (skalare) lineære ligninger. Vi sier at en delmengde av disse ligningene er *irredundant*[1] dersom de korresponderende kolonnevektorene i den transponerte matrisen A^T er lineært uavhengige. For systemet under, finn en maksimal delmengde av irredundante ligninger.

$\boxed{23}$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 \qquad + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{30}$ Gitt en $m \times n$-matrise A med $m > n$, vis at det finnes en vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ slik at systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har løsning.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.1

ORTOGONALE VEKTORER Avgjør om de oppgitte vektorene er innbyrdes ortogonale.

$\boxed{3}$ $\mathbf{v}_1 = (5, 2, -4, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -5, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 0, 8, -17)$.

[1] med andre ord, de er ikke *overflødige* (eng: redundant)

ORTOGONALE KOMPLEMENT De oppgitte vektorene utspenner et underrom av det indikerte Euklidske rommet. Finn en basis for det ortogonale komplementet $V^{\perp}$ til V.

$\boxed{19}$ $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 5, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 7, 11, 9, 5)$.

$\boxed{23}$ La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vilkårlige vektorer (i samme Euklidske rom). Vis at

(a) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$.

(b) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

$\boxed{30}$ Anta at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale vektorer og at $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vis at da er $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Eksamensoppgaver

$\boxed{\text{Des. 03, oppg. 5}}$ Gitt vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for underrommet $V \subseteq \mathbb{R}^3$ utspent av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_5$, og finn også en basis for underrommet $V^{\perp}$ (det ortogonale komplementet til V i $\mathbb{R}^3$).

b) Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn på underrommet V.

c) La $V \subseteq \mathbb{R}^n$, og anta at vi har gitt vektorer $\mathbf{v} \in V$ og $\mathbf{w} \in V^{\perp}$. Vis at dersom ingen av vektorene $\mathbf{v}$ eller $\mathbf{w}$ er nullvektoren, så er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lineært uavhengige.

$\boxed{\text{Mai 01, oppg. 4}}$ Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & -4 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Finn $\text{Null}(A)$. Hva er løsningsmengden til

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}?$$

b) Finn en basis for $\text{Col}(A)$, $\text{Row}(A)$ og $\text{Row}(A)^{\perp}$.

Flervalgsoppgaver

$\boxed{1}$ For hvilke(n) k er vektorene $\mathbf{u} = (2, 2, -1, k)$ og $\mathbf{v} = (k, 1, 1, k)$ ortogonale?

A: $k = 1$ **B:** $k = \pm 1$ **C:** $k = -1$ **D:** ingen k

Fasit

EP 4.4

7. $(1,0,-3,4)$, $(0,1,2,3)$; kolonne 1 og 2 i A.

17. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2\}$.

19. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

23. Den første, andre og fjerde.

EP 5.1

3. Ja.

19. $\{(-13,4,1,0,0), (4,-3,0,1,0), (-11,4,0,0,1)\}$.

Eksamensoppgaver

5. (Des 03)

a) Basis for V, $\{(1,0,1), (0,1,-1)\}$
Basis for $V^{\perp}$, $(-1,1,1)$

b) $(1,1,0)$

4. (Mai 01)

a) $\text{Null}(A) = \text{span}\{(-11,4,1,0), (-11,3,0,1)\}$
$\mathbf{x} = s(-11,4,1,0) + t(-11,3,0,1) + (1,0,0,0), \quad s,t \in \mathbb{R}$

b) Basis for $\text{Col}(A)$: $(1,1,2), (2,5,5)$,
basis for $\text{Row}(A)$: $(1,2,3,5), (0,1,-4,-3)$
(evt. $(1,0,11,11), (0,1,-4,-3)$ med Gauss-Jordaneliminasjon),
basis for $\text{Row}(A)^{\perp}$: $(-11,4,1,0), (-11,3,0,1)$