TMA4245 Statistikk
Vår 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Skriftlig innlevering 3

Oppgave 1

La X og Y være uavhengige Poisson-fordelte stokastiske variable, med forventningsverdi henholdsvis 5 og 10. Beregn følgende sannsynligheter,

$$\mathrm{P}(X \leq 5), \qquad \mathrm{P}(X \leq 3 | X \leq 5) \quad \text{og} \quad \mathrm{P}(X + Y > 10).$$

Oppgave 2

La X være fødselsvekt i gram til et tilfeldig valgt barn i Norge. Anta X er normalfordelt, der $\mathrm{E}(X) = 3315$ og $\mathrm{Var}(X) = 575^2$.

a) Beregn følgende sannsynligheter,

$$1)\ \mathrm{P}(X > 3000) \qquad 2)\ \mathrm{P}(3000 < X < 3500) \qquad 3)\ \mathrm{P}(X > 3500 \mid X > 3000)$$

Dersom fødselsvekten er mindre enn c gram, der

$$\mathrm{P}(X < c) = 0.01,$$

vil barnet bli klassifisert som undervektig. La Y være antall av $n = 100$ barn som var undervektige ved fødselen.

b) Under hvilke antagelser er Y binomisk fordelt?
Anta at Y er binomisk fordelt, hva er da $\mathrm{P}(Y > 0)$, og $\mathrm{P}(Y > 1 | Y > 0)$?

Oppgave 3

På italiensk fjernsyn vises det et søndagsshow med Fabrizio Frizzi som programleder, der Frizzi sitter ved siden av en stor safe som inneholder 250 000 000 lire. Safen har en hemmelig firesifret kode. Seerne ringer inn og foreslår koder, og den første som gjetter riktig, får pengene som safen inneholder. Hvert av sifrene i den firesifrede koden er altså et av tallene $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ eller 9. Anta foreløpig at ingen av seerne er i stand til å huske koder som er foreslått av tidligere innringere og forkastet, slik at hvert gjett kan betraktes som et tilfeldig forslag av en firesifret kode.

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig innringer gjetter riktig kode?

La X være antall innringinger til (og med) den personen som vinner pengene. Gjør kort rede for hvorfor X er geometrisk fordelt.

Bestem sannsynligheten for at akkurat innringer nummer 300 er den første som gjetter riktig.

Anta så at det i begynnelsen av programmet opplyses at sifferet 7 forekommer nøyaktig to ganger i den hemmelige koden (det er i denne formen showet faktisk blir vist) og la m betegne antall koder innringerne nå kan velge blant.

b) Vis at $m = 486$ (dvs. forklar hvordan denne verdien fremkommer).

Dersom vi antar at Frizzi snakker så fort at han rekker å ta i mot to forslag per minutt, hva blir nå forventet tid til noen vinner de 250 000 000 lire?

Anta så at seerne skriver ned alle koder som blir foreslått slik at ingen innringere foreslår en kode som tidligere er blitt foreslått. La Y betegne antall innringinger til førstemann gjetter riktig kode i dette tilfellet. Anta fremdeles at det opplyses at sifferet 7 opptrer nøyaktig to ganger i koden.

c) Bestem svarene på følgende spørsmål uttrykt som funksjon av m:

Hva er utfallsrommet til Y?

Vis at sannsynlighetsfordelingen til Y er gitt ved $P(Y = y) = \frac{1}{m}$.

Hva blir nå forventet tid til noen vinner de 250 000 000 lire (hvis Frizzi fremdeles rekker å ta i mot to forslag per minutt)?

Oppgave 4

En havneby observerer ankommende skip ved å bruke radar. Vi antar for enkelhets skyld at skipene alltid ankommer fra nord. Radaren er plassert 1 kilometer vest for havna. Det er ønskelig å oppdage ankommende skip så tidlig som mulig av praktiske og sikkerhetsmessige årsaker. Når skipet første gang fanges inn på radaren, observerer radaren vinkelen $Y \in [0, \pi/2)$, som vist i Figur 1. Radaren observerer kun vinkelen Y, og ikke avstanden til skipet. Vinkelen Y varierer fra skip til skip av mange årsaker.

La den kumulative fordelingsfunksjonen til Y være

$$F(y; \beta) = P(Y \leq y) = \frac{1 - \exp\{-y/\beta\}}{1 - \exp\{-\pi/(2\beta)\}}, \quad y \in [0, \pi/2),$$

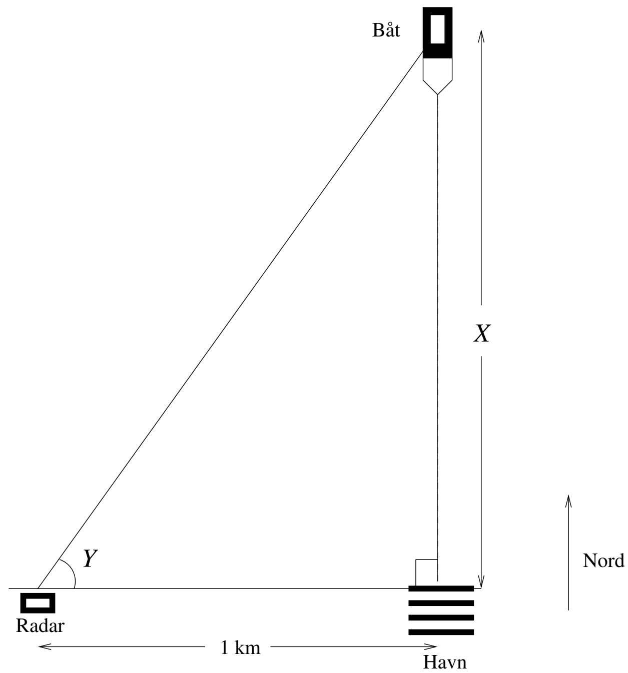
der $\beta > 0$ er en parameter.

a) Anta bare i dette punktet at $\beta = \pi/8$.

Regn ut $\mathrm{P}\Big(Y > \dfrac{\pi}{4}\Big)$, $\mathrm{P}\Big(\dfrac{\pi}{4} < Y < \dfrac{\pi}{3}\Big)$ og $\mathrm{P}\Big(Y > \dfrac{\pi}{4} \mid Y < \dfrac{\pi}{3}\Big)$.

b) Vis at sannsynlighetstettheten $f(y; \beta)$ til Y er

$$f(y; \beta) = \frac{1}{\beta - \beta \exp\{-\pi/(2\beta)\}} \exp\{-y/\beta\}, \quad y \in [0, \pi/2).$$



Figur 1: Illustrasjon til oppgave 4.

Havnebyen er mer interessert i avstanden til havna når skipet først oppdages enn vinkelen Y som radaren observerer. La X betegne denne avstanden, som vist i Figur 1.

Utled et uttrykk for sannsynlighetstettheten til X.

Det oppgis at $\dfrac{d}{dx}(\tan(x)) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ og $\dfrac{d}{dx}(\text{arc}\tan(x)) = \dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Fasit

1. $0.616, 0.430, 0.882$

2. **a**) 0.709, 0.335, 0.528 **b**) 0.634, 0.417

3. **a**) $1/10000, 9.7 \cdot 10^{-5}$ **b**) 4 timer 3 minutter **c**) 121 minutter 45 sekunder

4. **a**) 0.1192, 0.0671, 0.0708