



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4245 Statistikk

Vår 2023

Skriftlig innlevering 2

Oppgave 1

Simultanfordelingen, $f(x, y)$, til de to diskrete stokastiske variablene X og Y er gitt i følgende tabell:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$x = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$x = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Finn marginalfordelingen $g(x)$ til X og marginalfordelingen $h(y)$ til Y , og beregn forventning og varians til X og til Y .

Beregn kovariansen mellom X og Y , $\text{Cov}(X, Y)$. Er X og Y uavhengige? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 2

En person kaster en terning og holder på til han første gang får et resultat han har fått før. La X betegne antall kast og finn fordelingen til X .

Oppgave 3 X er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{dersom } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn fordelingsfunksjonen $F(x)$ til X . Finn sannsynligheten for at X ligger mellom $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$ når $n = 1$ og når $n = 2$. Finn medianen til X , dvs. den verdi av a som er slik at $P(X \leq a) = \frac{1}{2}$,

når $n = 1$ og når $n = 2$. Finn forventningsverdien til X når $n = 1$ og når $n = 2$ og sammenlign med de korresponderende medianer.

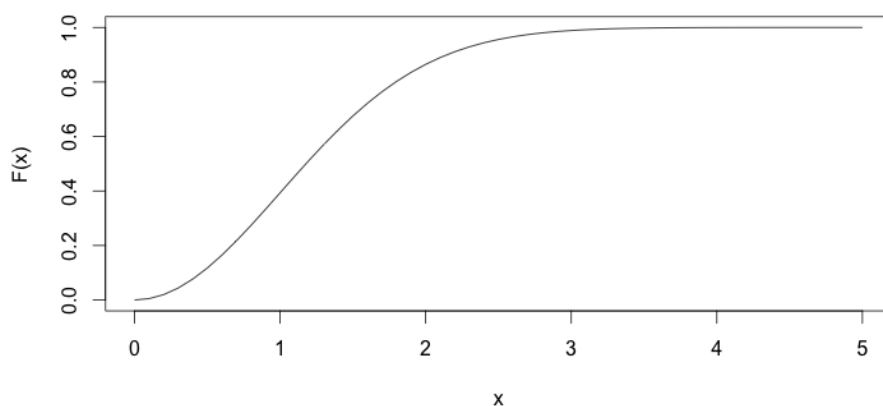
Oppgave 4

La den tilfeldige variabelen X beskrive i hvor lang tid en komponent har fungert i det den blir ødelagt. Vi kaller X for *levetiden* til komponenten.

Levetiden (målt i år), X , til en bestemt type mekaniske komponenter har vist seg å følge en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjon gitt ved

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\alpha}\right\} ; x > 0$$

der α er en parameter som beskriver kvaliteten til komponentene. Den kumulative fordelingsfunksjonen er vist i Figur 1, for tilfellet $\alpha = 1$. Fra figuren ser vi for eksempel at det svært sannsynlig at en komponent slutter å fungere i løpet av fem år.

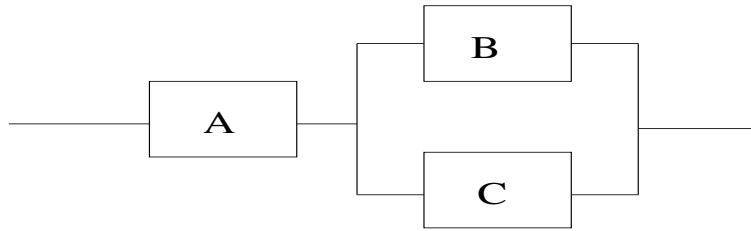


Figur 1: Kumulativ fordelingsfunksjon for levetid X

- a) Bestem sannsynlighetstettheten til X .

Bestem for hvilken verdi av x sannsynlighetstettheten $f(x)$ tar sitt maksimum. Skisser $f(x)$.

Et instrument inneholder tre komponenter av denne typen, alle med samme kvalitetsparameter α . Vi refererer til de tre komponentene som komponenter A, B og C. Det antas at de tre komponentene svikter uavhengig av hverandre. Komponentene inngår i instrumentet slik at instrumentet kun vil fungere så lenge komponent A og minst en av komponentene B og C fungerer. Dette kan illustreres med følgende figur.



La følgende fire hendelser være definert:

- A: Komponent A fungerer fremdeles etter to år.
- B: Komponent B fungerer fremdeles etter to år.
- C: Komponent C fungerer fremdeles etter to år.
- D: Instrumentet fungerer fremdeles etter to år.

b) Tegn inn hendelsene A, B og C i et Venn-diagram.

Skriver hendelsen D i Venn-diagrammet.

For $\alpha = 1$, finn sannsynligheten for at instrumentet fremdeles fungerer etter to år.

Oppgave 5

Det skal tas blodprøve av samtlige soldater i en militæravdeling for å finne ut om noen er smittet av en bestemt sykdom. Sannsynligheten for at blodprøven fra en tilfeldig valgt soldat er positiv (dvs. at han er smittet) antas å være lik p , og testresultatene for ulike individer antas å være uavhengige.

Man går frem på følgende måte: Blodprøver tas av $k (> 1)$ soldater om gangen, blodprøvene blandes og blandingen analyseres. Hvis den gir positiv reaksjon, noe som betyr at minst en av soldatene er smittet, tas nye blodprøver av de k , og prøvene analyseres enkeltvis. Hvis blandingen gir negativ reaksjon, blir det ikke tatt flere prøver.

a) Begrunn hvorfor antall smittede i en k -gruppe er binomisk fordelt og vis at sannsynligheten for at en blanding av k blodprøver skal gi positiv reaksjon er

$$1 - (1 - p)^k.$$

b) Hvordan defineres betinget sannsynlighet for en hendelse A gitt en annen hendelse B ? Soldat 19 Haugen får beskjed om at hans k -gruppe har vist positiv reaksjon. Hva er da sannsynligheten for at han er positiv?

c) Anta at en avdeling består av m grupper, hver med k soldater, slik at det totale antallet soldater er mk . La X være antall blodprøver som må analyseres før hele avdelingen er ferdig kontrollert. Vis at

$$E(X) = mk \left(1 + \frac{1}{k} - (1 - p)^k \right).$$

Hvis $k = 4$, for hvilke verdier av p er den benyttede fremgangsmåten å foretrekke i stedet for å analysere blodprøvene enkeltvis med en gang?

Fasit

1. $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{6}$

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, median: $\frac{1}{2}$ for $n = 1$ og $\frac{\sqrt{2}}{2}$ for $n = 2$, forventningsverdi: $\frac{1}{2}$ for $n = 1$ og $\frac{2}{3}$ for $n = 2$

4. **a)** $\alpha^{1/2}$ **b)** 0.034

5. **b)** $p/(1 - (1 - p)^k)$ **c)** $p < 1 - (1/2)^{(1/2)} \approx 0.29$