TMA4245 Statistikk
Vår 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

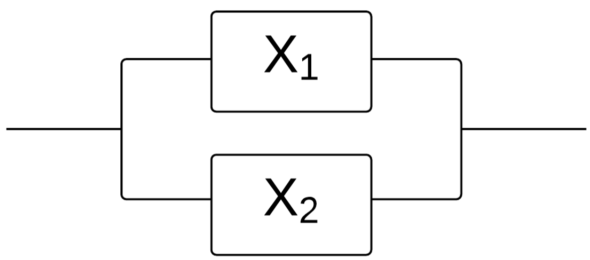
Anbefalte oppgaver 7

Oppgave 1

Betrakt et parallellsystem av 2 uavhengige komponenter, se Figur 1. Levetiden til hver komponent er eksponensialfordelt med parameter λ, dvs

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

La V være levetiden til systemet. Finn fordelingen til V, samt $\mathrm{E}(V)$.



Figur 1: Parallellsystem med to komponenter

Oppgave 2

a) Levetiden T i timer til et bestemt merke for radiobatterier ($1.5V$) kan antas å være $N(117.2,\ 10^2)$. I fru Jenssens radio er det 8 slike batterier. Hun vet at radioen virker dersom minst 4 av batteriene virker.

Hva er sannsynligheten for at fru Jenssens radio virker ved starten av herrestafetten på Lillehammer, hvis det da er 130 timer siden hun skiftet alle batteriene, og levetiden til disse antas uavhengige? Begrunn ditt valg av modell (fordeling).

b) Når $X \sim \mathrm{bin}(n, p)$, utled den momentgenerende funksjon til X og bruk denne til å finne uttrykket for $E(X)$. Du kan bruke at $\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x} = (a + b)^n$.

Oppgave 3

Anta at Y er uniformt fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn kumulativ fordeling $F_Y(y)$ til Y.
På en datamaskin generer vi ofte observasjoner fra en fordeling ved først å generere en observasjon fra en uniform fordeling og så transformere observasjonen. Vi skal se på transformasjonen $X = -\ln(Y)/\lambda$, der $\lambda > 0$.

Bruk $F_Y(y)$ til å finne kumulativ fordeling $F_X(x)$ til X.
Hva blir sannsynlighetsfordelingen $f_X(x)$ til X, og hvilken kjent statistisk fordeling er dette?

Oppgave 4

Et problem med vindmøller til kraftproduksjon er at fugler kan kollidere med rotorbladene og dø. Som et prøveprosjekt monteres ei mølle (A) på et sted langs norskekysten, og det registreres kontinuerlig hvor mange fugler som blir funnet døde av kollisjonsskader rundt mølla. Erfaring fra Danmark med lignende møller tilsier at forventet antall døde fugler per uke er $\lambda = 1$. Anta at den tilfeldige variabelen Y, antall fugler som kolliderer og dør med mølle A per uke, er poissonfordelt.

a) Hvis vi antar like forhold i Norge som i Danmark og at etterfølgende uker er uavhengige, finn sannsynligheten for at det i løpet av de første 5 uker skal kollidere mer enn 10 fugler med vindmølle A.

Gitt at det kolliderer mindre enn 5 fugler, hva er sannsynligheten for at ingen fugler kolliderte?

b) I løpet av fire år blir det funnet 261 fugler rundt den norske mølla. Estimer parameteren λ med sannsynlighetsmaksimering (maximum likelihood) fra disse data.

Ei anna mølle (B) ble plassert litt lenger inn i landet, på en plass med mindre fugletetthet. Anta at X, antall fugler som kolliderer og dør med mølle B per uke, er poissonfordelt med parameter ν og uavhengig av Y. La så $Z = X + Y$ være summen av døde fugler ved de to møllene

c) Finn den momentgenererende funksjonen $M_Z(t)$ til den tilfeldige variabelen Z.

Bruk den momentgenererende funskjonen til å si hvilken fordeling Z har.

Fasit

2. **a**) 0.005

3. Eksponensialfordeling med forventningsverdi $1/\lambda$

4. **a**) 0.014,0.015 **b**) 1.25