Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

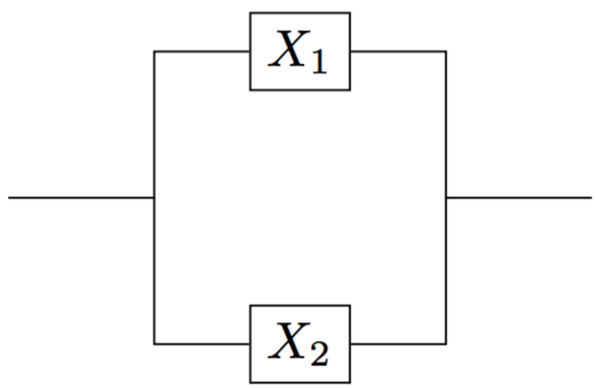
TMA4245 Statistikk
Vår 2023

Anbefalte oppgaver 7
Løsningsskisse

Oppgave 1

Betrakt et parallellsystem av to uavhengige komponenter, der levetiden til hver av komponentene er eksponensialfordelt med parameter λ, dvs

$$F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \text{ for } x \geq 0.$$



Figur 1: Paralellkopling av to komponenter

Da komponentene danner et paralellsystem, vil systemet fungere dersom minst en av komponentene fungerer. Vi lar dermed levetiden til systemet betegnes ved $V = \max(X_1, X_2)$, og fordelingen til V finnes ved å benytte at komponenten med lengst levetid er mindre eller lik v hvis og bare hvis begge komponentene er mindre eller lik v:

$$F_V(v) = \mathrm{P}(V \leq v) = \mathrm{P}(\max(X_1, X_2) \leq v) = \mathrm{P}(X_1 \leq v \cap X_2 \leq v)$$

$$\overset{Uavh.}{=} \mathrm{P}(X_1 \leq v) \cdot \mathrm{P}(X_2 \leq v) = (F_X(v))^2 = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda v})^2 = 1 - 2\mathrm{e}^{-\lambda v} + \mathrm{e}^{-2\lambda v}.$$

Vi har videre

$$f_V(v) = \frac{d}{dv}F_V(v) = 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda v} - 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda v}.$$

Forventningen til V er gitt ved

$$E(V) = \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v)\,dv.$$

Ved delvis integrasjon får vi dermed

$$E(V) = \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v)\,dv = \int_{0}^{\infty} (2\,\lambda\,v\,\mathrm{e}^{-\lambda v} - 2\,\lambda\,v\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda v})\,dv = \frac{3}{2\lambda}.$$

Oppgave 2

a) Sannsynligheten for at et batteri virker etter 130 timer er

$$\begin{aligned} p = P(T > 130) = 1 - P(\leq 130) &= 1 - P\left(\frac{T-\mu}{\sigma} \leq \frac{130 - 117.2}{10}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 1.28) = 1 - 0.8997 = 0.1003 \end{aligned}$$

Vi har $n = 8$ slike batterier og de er uavhengig av hverandre. Hvis X er antall batterier som virker etter 130 timer, har vi at X består av n uavhengige forsøk, hver med sannsylighet p for 'suksess', X er derfor binomisk fordelt. Radioen virker dersom minst 4 batterier:

$$\begin{aligned} P(\text{Radioen virker}) &= P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{3} p(x; n = 8, p = 0.1) = 1 - 0.995 = \underline{\underline{0.005}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} M_X(t) = \mathrm{E}[e^{tX}] &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} p(x; n, p) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} = (pe^t + 1 - p)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = n(pe^t + 1 - p)^{n-1}(pe^t)\big|_{t=0} \\ &= n(p + 1 - p)^{n-1} p = \underline{\underline{np}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \int_0^y 1\mathrm{d}t, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

Legg først merke til at siden verdien av Y ligger mellom 0 og 1, så kan $-\ln(Y)/\lambda$ bare oppnå verdier større enn 0 Det vil si at for $x > 0$ kan vi bruke

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \mathrm{P}(-\ln(Y)/\lambda \leq x) = \mathrm{P}(\ln(Y) \geq -\lambda x) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq \mathrm{e}^{-\lambda x}),$$

der ulikhetstegnet må snus fordi det ganges med -1 på begge sider av ulikheten. Dette betyr at

$$F_X(x) = 1 - F_Y(\mathrm{e}^{-\lambda x}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad \text{for } x > 0.$$

X kan ikke bli mindre enn 0 så

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Sannsynlighetsfordeling er

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Dette er en eksponentialfordeling med forventningsverdi $1/\lambda$.

Oppgave 4

a)

$$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - \sum_{y=0}^{10} \frac{5^y}{y!} e^{-5} = 1 - 0.986 = 0.014$$

$$P(Y < 5) = P(Y \leq 4) = 0.44$$

$$P(Y = 0 | Y < 5) = \frac{P(Y = 0 \cap Y < 5)}{P(Y < 5)} = \frac{P(Y = 0)}{P(Y < 5)} = \frac{e^{-5}}{0.44} = 0.015$$

b) The likelihood function is the probability of getting $Y = 261$ with parameter $4 \cdot 52\lambda = 208\lambda$. This likelihood is a function of the parameter λ. The log-likelihood becomes

$$l(\lambda) = \log P(Y = 261; \lambda) = 261 \log(208\lambda) - \log(261!) - 208\lambda$$

The maximum is found by differentiation.

$$l'(\lambda) = \frac{261}{\lambda} - 208 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{261}{208}.$$

This gives $\hat{\lambda} = 261/208 = 1.25$.

c) The moment generating function of a sum of two independent variables is the product of the moment generating functions.

The moment generating function of a Poisson distribution is

$$M_X(t) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{ty} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^y}{y!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^y}{y!} e^{-e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

where the last sum equal 1 because it is the sum over a Poisson variable with parameter $e^t\lambda$. Then

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t) = e^{\lambda(e^t-1)}e^{\nu(e^t-1)} = e^{(\lambda+\nu)(e^t-1)}$$

We recognize the functional form of the moment generating function. This is the moment generating function of a Poisson distribution with parameter $\lambda + \nu$.