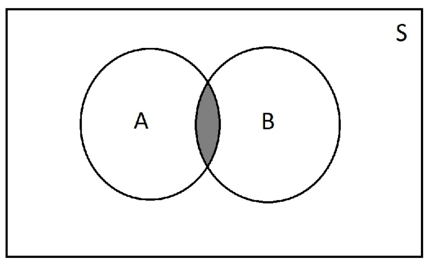
TMA4245 Statistikk
Vår 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

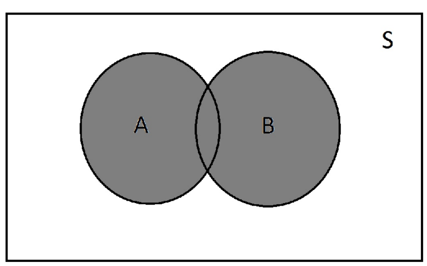
Anbefalte oppgaver 2
Løsningsskisse

Oppgave 1

Hendelsene A og B er ikke disjunkte, det vil si at de kan ha noen felles elementer. De fire hendelsene $A \cap B, A \cup B, A' \cap B$ og $A' \cap B'$ er representert med skravert område i venn-diagrammene i figur 1 til 4.



Figur 1: Venn-diagram for hendelsen $A \cap B$

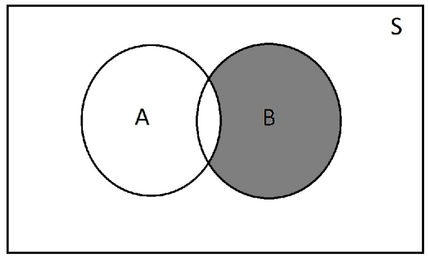


Figur 2: Venn-diagram for hendelsen $A \cup B$

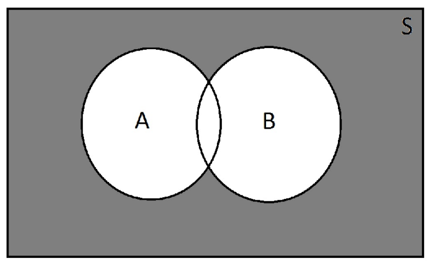
Vi kan skrive $A' \cap B'$ på en alternativ måte som $(A \cup B)'$. Dette kan også skrives som $S \setminus (A \cup B)$.

Oppgave 2

For en tilfeldig valgt person som turisten støter på, definerer vi de tre hendelsene



Figur 3: Venn-diagram for hendelsen $A' \cap B$



Figur 4: Venn-diagram for hendelsen $A' \cap B'$

- I: personen er innfødt,
- T: personen er turist,
- E: personen snakker engelsk.

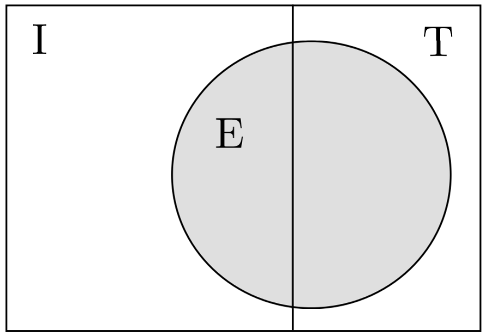
Opplysningene i oppgaveteksten kan da formuleres som følger.

- Hver tiende innfødte snakker engelsk: $P(\mathrm{E}|\mathrm{I}) = 1/10$,
- hver femte person han møter er turist: $P(\mathrm{T}) = 1/5$,
- annenhver turist snakker engelsk: $P(\mathrm{E}|\mathrm{T}) = 1/2$.

a) Vi antar at alle personene turisten møter enten er innfødte, eller er turister selv. Da er I og T komplementære hendelser, slik at

$$P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{T}) = 1 \quad \text{og} \quad P(\mathrm{I}) = 1 - P(\mathrm{T}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

I venndiagrammet i figur 5 er dette illustrert ved å dele opp rektangelet som representerer hele utfallsrommet i to deler. Siden vi har engelsktalende både blant de innfødte og blant turistene, plasserer vi regionen som representerer E slik at den overlapper både I og T.



Figur 5: Venndiagram for hendelsene I, T og E.

b) Sannsynligheten for at en tilfeldig person turisten møter er engelsktalende, er gitt ved loven om total sannsynlighet,

$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}) &= P(\mathrm{E} \cap \mathrm{I}) + P(\mathrm{E} \cap \mathrm{T}) \\ &= P(\mathrm{E}|\mathrm{I})P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{E}|\mathrm{T})P(\mathrm{T}) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{9}{50}}}. \end{aligned}$$

c) For å finne den betingede sannsynligheten for at en person er innfødt, gitt at vedkommende snakker engelsk, bruker vi definisjonen av betinget sannsynlighet, samt sannsynligheten $P(\mathrm{E})$ fra **b)**,

$$P(\mathrm{I}|\mathrm{E}) = \frac{P(\mathrm{I} \cap \mathrm{E})}{P(\mathrm{E})} = \frac{P(\mathrm{E}|\mathrm{I})P(\mathrm{I})}{P(\mathrm{E})} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{9}{50}} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}.$$

Oppgave 3

Opplysningene i oppgaven tilsier at: $P(J) = 0.8$, $P(\bar{J}) = 1 - 0.8 = 0.2$, $P(R|J) = 0.02$, $P(R|\bar{J}) = 0.05$.

Andel innringere som mener JA er ved Bayes formel:

$$P(J|R) = \frac{P(R|J)P(J)}{P(R|J)P(J) + P(R|\bar{J})P(\bar{J})} = \underline{\underline{0.62}}$$

Sammenliknet med den store gruppen som mener JA er det få som ringer inn, dermed blir resultatet for JA dårligere.

Oppgave 4

a) For at person A skal vinne må vedkommende enten vinne på første kast (A_1), andre kast (A_2), ...
Altså har vi

$$p_A = P(A_1) + P(A_2) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Når person A kaster sitt n'te kast har person A og B kastet $n-1$ kast hver. For at person A skal vinne på sitt n'te kast (A_n), må vedkommende kaste en sekser, mens ingen av de $2(n-1)$ foregående kastene kan være en sekser. Sannsynligheten for at person A vinner på sitt n'te kast er altså lik

$$P(A_n) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)}.$$

Dermed er

$$p_A = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)}.$$

Vi kan så definere $k = n - 1$

$$p_A = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{k}.$$

Vi kan så bruke at

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Da har vi at

$$p_A = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{k} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}.$$

b) For at person B skal vinne på sitt n'te kast må hver av de $2(n-1)+1$ forrige kastene være noe annet enn terningkast 6. I tillegg må person B sitt n'te kast være en sekser. Altså er

$$P(B_n) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)+1} = \frac{5}{6} P(A_n).$$

Da har vi at

$$p_B = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6} P(A_n) = \frac{5}{6} p_A.$$

Tilsvarende har vi for person A at

$$P(A_{n+1}) = \frac{5}{6} P(B_n).$$

For person A har vi i tillegg at $P(A_1) = \frac{1}{6}$. Da er

$$p_A = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \sum_{n=2}^{\infty} P(B_{n-1}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} p_B.$$

Hvis vi setter uttrykket for p_B inn i uttrykket for p_A får vi

$$p_A = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 p_A.$$

Anta nå at vi har n spillere, og la $p_{k,i}$ betegne sannsynligheten for at person i vinner på sitt k'te kast. Før person i kaster sitt k'te kast har alle de n spillerne kastet $k-1$ kast. De $i-1$ første spillerne har i tillegg kastet enda et kast. Altså har terningen blitt kastet $n(k-1)+i-1$ ganger. For at person i skal vinne på sitt k'te kast kan ingen av de forrige kastene være seksere, samtidig som spiller i kaster en sekser. Altså er

$$p_{k,i} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n(k-1)+i-1}.$$

Tilsvarende er

$$p_{k,i-1} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n(k-1)+i-2},$$

hvor $i > 1$. Det betyr at

$$p_{k,i} = \frac{5}{6} p_{k,i-1}$$

når $i > 1$. Da har vi

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,i} = \frac{5}{6} \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,i-1} = \frac{5}{6} p_{i-1}.$$

For $i = 1$ har vi $p_{1,1} = 1/6$, og at

$$p_{k,1} = \frac{5}{6} p_{k-1,n},$$

hvor $k > 1$. Da har vi

$$p_1 = \frac{1}{6} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5}{6} p_{k-1,n} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} p_n.$$

Vi kan nå bruke at

$$p_n = \frac{5}{6} p_{n-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 p_{n-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} p_1.$$

Hvis vi setter dette uttrykket inn i uttrykket for p_1 har vi

$$p_1 = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^n p_1.$$

Løser vi denne ligningen for p_1, får vi

$$p_1 = \frac{1/6}{1 - (5/6)^n}.$$

Det betyr at

$$\lim_{n \to \infty} p_1 = \frac{1}{6}.$$

Oppgave 5 Vi antar at vi har å gjøre med en vanlig kortstokk, bestående av 52 unike kort, hvor hvert kort tilhører en av fire farger (hjerter, ruter, spar, kløver), og har en av 13 verdier (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K). Når vi skal beregne sannsynligheten for å få delt ut ulike pokerhender, trenger vi totalt antall mulige hender, altså antall mulige utvalg av fem kort, som er

$$m = \binom{52}{5} = 2\,598\,960.$$

a) For å få ett par må man få to kort med samme verdi og tre kort med ulike andre verdier. Verdien til paret kan velges på $\binom{13}{1}$ måter, og fargene til de to kortene i paret kan velges på $\binom{4}{2}$ måter. Merk at vi ikke inkluderer muligheten for at de to kortene har samme farge, siden det bare er ett kort i hver farge med den valgte verdien. De tre siste kortene kan ikke ha samme verdi som paret, og må ha tre ulike verdier, slik at vi ikke får to par eller fullt hus. Etter at verdien til paret er valgt, er det 12 "ubrukte" verdier igjen. Verdiene til de tre siste kortene kan velges blant disse på $\binom{12}{3}$ ulike måter. Fargen til hvert av disse kortene kan så velges på $\binom{4}{1}$ måter. Antall hender med akkurat ett par er, ved produktsetningen,

$$g(\text{Ett par}) = \binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3 = 13 \cdot 6 \cdot 220 \cdot 4^3 = 1\,098\,240.$$

Sannsynligheten for å få ett par er derfor

$$P(\text{Ett par}) = \frac{g(\text{Ett par})}{m} = \frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.4226}}.$$

b) En hånd med to par har to kort med én verdi, to kort med en annen verdi, og ett kort med en tredje verdi. Først kan vi velge verdiene til de to parene på $\binom{13}{2}$ måter. Så kan vi, for hvert par, velge farger på $\binom{4}{2}$ måter. Etter å ha valgt to verdier til parene, er det 11 "ubrukte" verdier tilbake. Vi kan derfor velge verdien til det siste kortet på $\binom{11}{1}$ måter. Til slutt har vi $\binom{4}{1}$ alternativer for fargen til det siste kortet. Antall hender med to par gis av produktet

$$g(\text{To par}) = \binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{11}{1}\binom{4}{1} = 78 \cdot 6^2 \cdot 11 \cdot 4 = 123\,552,$$

slik at sannsynligheten for å få utdelt to par er

$$P(\text{To par}) = \frac{g(\text{To par})}{m} = \frac{123\,552}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.0475}}.$$

c) I tilfellet tress har tre av kortene samme verdi, mens de to øvrige kortene har to andre verdier. For de tre første kortene kan vi velge verdi på $\binom{13}{1}$ måter, og farger på $\binom{4}{3}$ måter. Etter dette er det 12 verdier igjen å velge mellom, så for de to siste kortene kan vi velge verdier på $\binom{12}{2}$ måter. For hvert av dem har vi så $\binom{4}{1}$ fargevalg. Antall tress-hender er gitt ved

$$g(\text{Tress}) = \binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}^2 = 13 \cdot 4 \cdot 66 \cdot 4^2 = 54\,912,$$

og sannsynligheten for å få tress er

$$P(\text{Tress}) = \frac{g(\text{Tress})}{m} = \frac{54\,912}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.0211}}.$$

d) En straight har fem kort med verdier i rekkefølge, uansett kortfarge. Ser vi kun på verdi, har vi 10 måter å lage en straight på:

$$\begin{array}{ccccc} \text{A} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & \vdots & & \\ 9 & 10 & \text{J} & \text{D} & \text{K} \\ 10 & \text{J} & \text{D} & \text{K} & \text{A}. \end{array}$$

For hvert av de fem kortene, har vi $\binom{4}{1}$ farger å velge blant. Antall hender med straight blir derfor

$$g(\text{Straight}) = 10 \cdot \binom{4}{1}^5 = 10 \cdot 4^5 = 10\,240.$$

Sannsynligheten for å få delt ut en straight er altså

$$P(\text{Straight}) = \frac{g(\text{Straight})}{m} = \frac{10\,240}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.0039}}.$$

e) En flush består av fem kort med samme farge. Vi kan velge fargen på $\binom{4}{1}$ måter. Deretter må de fem kortene trekkes fra de 13 kortene med den valgte fargen, hvilket kan gjøres på $\binom{13}{5}$ måter. Antall flush-hender er derfor

$$g(\text{Flush}) = \binom{4}{1}\binom{13}{5} = 4 \cdot 1287 = 5148.$$

og sannsynligheten for å få flush er

$$P(\text{Flush}) = \frac{g(\text{Flush})}{m} = \frac{5148}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.0020}}.$$

f) Fullt hus tilsvarer ett par og tress på en gang, altså tre kort med én farge, og to kort med en annen farge. Vi kan velge verdien til de tre like kortene på $\binom{13}{1}$ måter, og fargene deres på $\binom{4}{3}$ måter. Etter det er det 12 verdier igjen, så vi kan velge verdien til paret på $\binom{12}{1}$ måter. Til slutt kan fargene til paret velges på $\binom{4}{2}$ måter. Antall hender med fullt hus er

$$g(\text{Fullt hus}) = \binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2} = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744,$$

så sannsynligheten for fullt hus blir

$$P(\text{Fullt hus}) = \frac{g(\text{Fullt hus})}{m} = \frac{3744}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.0014}}.$$

g) For å få fire lange må man få fire kort med samme verdi og ett kort med en annen verdi. Verdien til de fire like kortene kan velges på $\binom{13}{1}$ måter, og fargene kan velges på $\binom{4}{4}$ måter. For det siste kortet kan verdi velges på $\binom{12}{1}$ måter, og farge på $\binom{4}{1}$ måter. Antall hender med fire lange er

$$g(\text{Fire lange}) = \binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{12}{1}\binom{4}{1} = 13 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 4 = 624,$$

og sannsynligheten for å få fire lange er

$$P(\text{Fire lange}) = \frac{g(\text{Fire lange})}{m} = \frac{624}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.00024}}.$$

h) En straight flush består av fem kort med samme farge i rekkefølge. Utfra samme argument som for straight i **d)**, har vi 10 måter å lage en straight på, når vi kun betrakter kortenes verdier. For at hånden skal være en straight flush må alle fem kortene ha samme farge, som gir fire alternativer. Antall hender med straight flush er

$$g(\text{Straight flush}) = 10 \cdot 4 = 40,$$

slik at sannsynligheten for å få delt ut en straight flush er

$$P(\text{Straight flush}) = \frac{g(\text{Straight flush})}{m} = \frac{40}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.0000154}}.$$

i) En royal straight flush er en straight flush med ess (A) som høyeste kort. Av de $g(\text{Straight flush}) = 40$ måtene å få straight flush på, er det fire (én for hver farge) som også er royal straight flush. Antall måter å få royal straight flush på er derfor

$$g(\text{Royal straight flush}) = 4.$$

Sannsynligheten for å få en royal straight flush er

$$P(\text{Royal straight flush}) = \frac{g(\text{Royal straight flush})}{m} = \frac{4}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.0000015}}.$$