Plenumsregning 14: Oppsummering

Eksamen vår 2023

Oppgave 8

Finn matrisen A som tilfredsstiller likningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{B_{3\times 3}} \underline{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C_{2\times 2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{D_{3\times 2}} \qquad A_{3\times 2} = ?$$

Vi løser matriselikningen:

$$BAC = D$$

$$B^{-1}BAC = B^{-1}D$$

$$ACC^{-1} = B^{-1}DC^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = B^{-1}DC^{-1}} \quad (*)$$

Mellomrgning (ikke gjennomgått):

$$(B \mid I) \overset{\text{Gauss}}{\sim} (I \mid B^{-1}) \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(C \mid I) \quad (I \mid C^{-1}) \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi setter inn for B^{-1}, D, C^{-1} i likningen merket (*):

$$(*)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}}}$$

Eksamen kont 2023

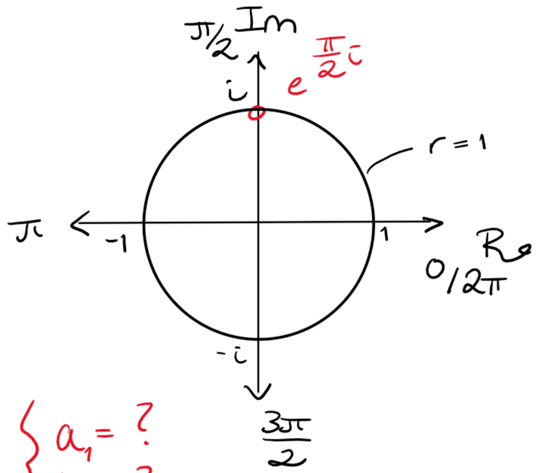
Oppgave 2

Regn ut Re z og Im z når

$$z = i^{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^4} - 3e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$z = i^{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^4} - 3e^{\frac{\pi}{2}i}$$

Denne oppgaven handler i stor grad om å dele opp i mindre problemer. Vi ser på de ulike delene av z og oversetter mellom polar og kartesisk form. Vi begynner med å skrive $e^{\frac{\pi}{2}i}$ på kartesisk form:



Generelt:

$z = re^{i\theta}$

(polar form / eksp. form)

$a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$

Spesielt:

$e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\downarrow$

$z_1 = a_1 + b_1 i \quad \begin{cases} a_1 = ? \\ b_1 = ? \end{cases}$

$a_1 = 1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot 0 = 0$

$b_1 = 1\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}i} = 0 + 1 \cdot i = \underline{i}$

Deretter skriver vi $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ på polar form:

$z = a + bi$
(kartesisk form)

$z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $\begin{cases} a_2 = \sqrt{2} \\ b_2 = \sqrt{2} \end{cases}$

$\downarrow$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ $\begin{cases} r_2 = ? \\ \theta_2 = ? \end{cases}$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r_2 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$

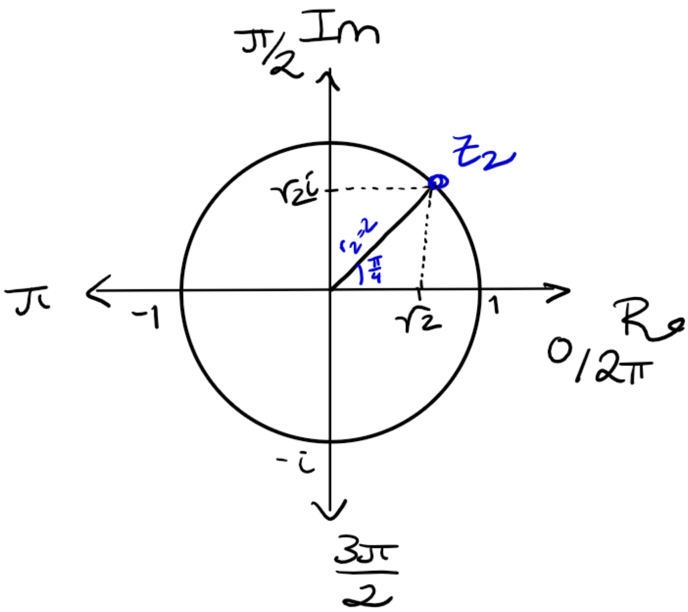
$\tan\theta = \frac{\text{mot}}{\text{hos}} = \frac{b}{a}$

$\downarrow$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

Vi tegner for å forsikre oss om at vi har funnet riktig vinkel:



$\Rightarrow \underline{z_2 = 2e^{\frac{\pi}{4}i}}$

Nå som vi har $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ på polar form er det lettere å regne ut 4.-potensen:

$$z_2^4 = (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^4 = \left(2e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^4 = 2^4 e^{\left(\frac{\pi}{4}i\right)\cdot 4} = 16e^{\pi i} = \underline{-16}$$

z_3

$$z_3 = e^{\pi i} \quad \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 1\cos(\pi) = -1 \\ b &= 1\sin(\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_3 = -1 + 0i = -1$$

Over har vi oversatt $e^{\pi i}$ til kartesisk form.
Deretter setter vi inn i det opprinnelige uttrykket for z. Da har vi z på kartesisk form og kan bestemme $\mathrm{Re}(z)$ og $\mathrm{Im}(z)$:

$$z = i^{-16} - 3i$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$i^{-16} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-16} = e^{i\frac{\pi}{2}(-16)} = e^{-i8\pi} = e^{i0\pi} = 1$$

$$\Rightarrow z = 1 - 3i$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 1 \\ \mathrm{Im}(z) = -3 \end{cases}$$

Oppgave 3

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Finn en basis for Col A og Null A.
- Har systemet
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
Løsning for enhver $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$? Hvis det har en løsning for en spesifikk $\boldsymbol{b}$, er denne løsningen da unik? Begrunn svaret.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Først finner vi en basis for nullrommet til A. Dette er alle vektorer som er løsninger av det homogene likningssystemet, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$① \quad N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0}\} = ?$$

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 0 \\ 2 & -1 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3s \\ x_2 = 2s \\ x_3 = s, \end{cases} s \in \mathbb{R} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow N(A) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Deretter skal vi finne en basis for kolonnerommet til A, Col(A). Vi husker definisjonen av kolonnerom:

Definisjon

Kolonnerommet til en reell $m \times n$-matrise

$$A = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n]$$

er underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene i A:

$$\mathrm{C}(A) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$$

Kolonnerommet til A består altså av alle lineærkombinasjoner av kolonnene i A. Produktet $A\boldsymbol{v}$ er nettopp alle lineærkombinasjoner av kolonnene i A, så vi kan skrive følgende:

(2) $\mathrm{Col}(A) = \{A\vec{y} \mid \vec{y} \in \mathbb{R}^n\} = ?$

Vi finner en basis for kolonnerommet ved å:
1) Radredusere A.
2) Identifisere kolonnene med ledende enere.
3) Velge deres respektive kolonner i den opprinnelige matrisen A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \underset{\text{Gauss}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Deretter ønsker vi å finne ut om likningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har en løsning for enhver $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$:

(3) $A\vec{x} = \vec{b}$ løsbart $\forall\, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$?

Men siden kolonnerommet til A IKKE er maksimalt, altså $\dim(\mathrm{Col}(A)) = 2 < 3$, så vil det finnes $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ slik at systemet ikke er løsbart:

Ettersom $\dim(\mathrm{Col}(A)) = 2 < 3 \Rightarrow \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ s.a. $A\vec{x} = \vec{b}$

IKKE løsbart.

Med andre ord finnes det vektorer $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ som IKKE kan uttrykkes som lineærkombinasjoner av kolonnene til A.

Så, gitt at systemet har en løsning for en gitt $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, er denne løsningen unik?

4 Gitt at $A\vec{x} = \vec{b}$ løsbart for en gitt $\vec{b}$, er $\vec{x}$ UNIK?

At systemet er løsbart betyr at det finnes en $\vec{x}$ s.a. $A\vec{x} = \vec{b}$

$A\vec{x} = \vec{b}$ LØSBART for gitt $\vec{b} \Rightarrow \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ s.a $A\vec{x} = \vec{b}$

$\vec{b} \in \mathrm{Col}(A)$

En generell løsning $\vec{x}$ vil være på følgende form:

Gen. løsn. $\vec{x}$ av $A\vec{x} = \vec{b}$ er på formen

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_p$$

Gen. løsn. av $A\vec{x} = \vec{0}$

Partikulær løsn. av $A\vec{x} = \vec{b}$

Men vi har jo sett at det fnnes uendelig mange løsninger av det homogene likningssystemet. Altså finnes det uendelig mange generelle løsninger $\vec{x}$, og dermed vil ikke løsningen være unik:

$\exists\ \infty$ mange $\vec{x}_0 \Rightarrow \exists\, \vec{x}$ løsn. av $A\vec{x} = \vec{b}$

$\hookrightarrow$ M.a.o. $\vec{x}$ IKKE unik.

Eksamen vår 2023

Oppgave 5

- Finn egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

  Når det er kjent at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektorer.

- ~~Løs deretter initialverdiproblemet~~

$$\cancel{\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1.}$$

Vi gjør kun første del av oppgaven her for å repetere kunnskaper fra lengre tilbake i tid.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ egenvektor}$$

Vi ønsker å finne egenverdiene til A:

1) $\lambda_i = ?$

Vi regner ut produktet $A\vec{u}$ og ser at $\vec{u}$ er uforandret. Dermed har $\vec{u}$ egenverdi $\lambda_1 = 1$:

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1}$$

Deretter regner vi ut produktet $A\vec{v}$ og ser at $\vec{v}$ skaleres.

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Vi finner skaleringsfaktoren ved å løse likningen $A\vec{v} = \lambda_2\vec{v}$ komponentvis:

$$A\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2\lambda_2 \\ 3/2 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_2 = 3/2}$$

Eksamen kont 2023

Oppgave 8

Benytt minste kvadraters metode til å finne andregradspolynomet

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Som minimerer avstanden til datapunktene

x	-1	0	1	2
y	1	-2	0	5

(Det vil si, finn a, b og c).

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

x	-1	0	1	2
y	1	-2	0	5

Datapunktene gir oss 4 likninger med 3 ukjente, altså et overbestemt likningssystem:

$$p(-1) = 1 \Leftrightarrow a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 1 \Leftrightarrow a - b + c = 1$$

$$p(0) = -2 \Leftrightarrow a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = -2 \Leftrightarrow c = -2$$

$$p(1) = 0 \Leftrightarrow a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

$$p(2) = 5 \Leftrightarrow a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 5 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dette systemet er i utgangspunktet ikke løsbart, men ved hjelp av minste kvadraters metode kan vi finne en tilnærmet løsning ved å løse et annet likningssystem:

$$A\vec{x} = \vec{b} \xrightarrow{\text{MKM}} \underbrace{A^TA}\,\vec{x} = \underbrace{A^T\vec{b}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 21 \\ 8 & 6 & 2 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3/5 \\ c = -17/10 \end{cases} \Rightarrow p(x) = 2x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{17}{10} \text{ minimerer avstanden}$$

Eksamen vår 2023

Oppgave 9

La

$$P_2(\mathbb{R}) = \{p(x) = ax^2 + bx + c \text{ for koeffisienter } a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

være vektorrommet av reelle polynomer av grad høyst 2.

- Vis at $T: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definert ved

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix} \qquad (p'(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x), \qquad p''(x) = \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}(x))$$

er en lineærtransformasjon og

- bestem ker T.

$T: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{pmatrix}$$

<u>Mål:</u> ① Vise T lin. trans.

② Finne $\ker(T)$

Vi at T er en lineærtransformasjon ved å kontrollere at T er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon:

La $p, q \in P_2(\mathbb{R})$

Så, er T lukket under addisjon?

$$T(p+q) \stackrel{?}{=} T(p) + T(q)$$

Vi gjør først litt mellomregning hvor vi benytter oss av at derivasjon er en lineær operasjon:

Mellomregning:

$$(p+q)'(x) = p'(x) + q'(x)$$

$$(p+q)''(x) = p''(x) + q''(x)$$

i) $$T(p+q) = \begin{pmatrix} (p+q)(0) \\ (p+q)'(1) \\ (p+q)''(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) + q(0) \\ p'(1) + q'(1) \\ p''(2) + q''(2) \end{pmatrix} = T(p) + T(q)$$

Så T er lukket under addisjon, men er T lukket under skalarmultiplikasjon?

ii) La $p \in P_2(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$:

$$T(cp) \stackrel{?}{=} cT(p)$$

Mellomregning:

$$(cp)'(x) = cp'(x), \quad (cp)''(x) = cp''(x)$$

$$T(cp) = \begin{pmatrix} (cp)(0) \\ (cp)'(1) \\ (cp)''(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cp(0) \\ cp'(1) \\ cp''(2) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{pmatrix} = cT(p)$$

Ettersom både i) og ii) er oppfylt vet vi at T er en lineærtransformasjon:

i) + ii) $\Longrightarrow$ T lin. trans.

Deretter finner vi kjernen til transformasjonen. Vi husker definisjonen av kjernen, nemlig at den består av alle de elementene som sendes til $\vec{0}$:

$$\text{Her: } \operatorname{Ker}(T) = \{ \overbrace{ax^2 + bx + c}^{p(x)} \mid T(p) = \vec{0} \}$$

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 2a \cdot 1 + b \\ 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2a + b \\ 2a \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2a + b = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 + b = 0 \rightarrow b = 0 \\ 2a = 0 \rightarrow a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(p) = \vec{0} \Longleftrightarrow p(x) = 0$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{\operatorname{Ker}(T) = \{ 0 \}}}$$

Kjernen til T består altså kun av nullelementet, det trivielle polynomet.

Eksamen kont 2023

Oppgave 9 (Ikke gjennomgått)

La $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ betegne vektorrommet av reelle $n \times n$-matriser og la

$$S_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ A^\top = A\} \qquad (A^\top \text{ er den transponerte av } A)$$

- Bestem en basis for S_n når $n = 2$.
- Finn $\dim S_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

$M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$S_n = \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A^T = A \}$

Vi ønsker nå å finne en basis for S_n når $n = 2$.

1 $n=2$, basis for S_2

Vi lar A være en vilkårlig 2×2-matrise med reelle koeffisienter:

La $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow a,b,c,d \in \mathbb{R}$

A er med i mengden S_2 hvis og bare hvis A er sin egen transponerte:

$$A \in S_2 \iff A = A^T$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\iff b = c$$

Dermed vet vi at en generell matrise i S_2 er på følgende form:

En generell matrise i S_2 er på formen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

Vi kan dekomponere denne matrisen og skrive den som en lineærkombinasjon av følgende matriser:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Disse matrisene er lineært uavhengige. Siden matrisen A var en generell matrise, betyr det at vi kan skrive alle matriser i S_2 som en lineærkombinasjon av disse matrisene. De danner med andre ord en basis for S_2:

$$\Rightarrow S_2 = \text{span}\Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_3} \Big\}$$

danner er basis for S_2

Deretter ønsker vi å bestemme dimensjonen til S_n for alle naturlige tall n:

2 $\dim S_n = ? \quad \forall n$

Vi ser først på tilfellet $n = 1$. $S_n = \mathbb{R}$, og dimensjonen er dermed 1:

i) $S_1 = \mathbb{R} \rightarrow \dim(S_1) = \mathbb{R}$

For $n \geq 2$ vil S_n bestå av alle symmetriske $n \times n$-matriser hvor koeffisientene tilfredsstiller følgende, altså hvor venstre-diagonalelementene er like:

ii) For $n \geq 2$,

$$S_n = \{ A_{n\times n}(\mathbb{R}) = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \mid a_{ij} = a_{ji} \text{ for } 1 \leq i \leq j \leq n \}$$

Vi tenker oss nå en generell matrise A i S_n, som vi ønsker å uttrykke som en lineærkombinasjon av enkle matriser, $E_{k,l}$. Vi lar $E_{k,l}$ for k, l mellom 1 og n være $n \times n$-matrisen med koeffisient lik 1 i posisjonene (k, l) og (l, k) og koeffisienter lik 0 ellers.

$E_{k,l}$ $\forall$ $1 \leq k, l \leq n$ $n \times n$-matrise m. koeff. 1 i (k,l) og (l,k) og 0 ellers

Dermed kan vi, som i 2×2-tilfellet, dekomponere A, altså uttrykke den som en lineærkombinasjon av de enkle matrisene:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

Disse matrisene $E_{i,j}$ vil utgjøre en basis for S_n.

$\{E_{i,j} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ basis for S_n

Dimensjonen til S_n er, per definisjon, lik antall basismatriser, altså:

$$\dim S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$