Plenumsregning 13: Andre ordens differensiallikninger

Ekstraoppgaver

Oppgave 1-2 c)

En modifisert oppgave 😊

Gitt følgende andreordens differensiallikning

$$y'' + y = 0$$

i. Skriv om til et system av førsteordens differensiallikninger.

$$y'' + y = 0 \quad (*)$$

Vi ønsker nå å skrive om dette til et system av førsteordens diff.likninger. Det gjør vi ved å definere $x_1(t) = y(t)$ og $x_2(t) = y'(t)$:

La $x_1(t) = y(t)$
$x_2(t) = y'(t)$

Vi deriverer og gjenkjenner at:

- $x_1{}'(t) = y(t)$ er det samme som $x_2(t)$
- $x_2'(t) = y''^{(t)} = -y(t)$ (snu på original likning).

Da
$$x_1'(t) = y'(t) = x_2(t)$$
$$x_2(t) = y''(t) \underset{(*)}{=} -y(t) = -x_1(t)$$

Vi skriver nå $x_1{}'(t)$ og $x_2{}'(t)$ som lineærkombinasjoner av $x_1(t)$ og $x_2(t)$. Dermed får vi et 2×2-likningssystem:

Dermed
$$x_1'(t) = 0 \cdot x_1(t) + 1 \cdot x_2(t)$$
$$x_2(t) = -1 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}}_{\vec{x}'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\vec{x}(t)}$$

ii. Finn en generell basis for løsningsrommet og skriv generell løsning.

En modifisert oppgave 😊

Vi skal bruke et teorem gjennomgått i forelensingsvideoene (og i forelesningsnotatene) til å løse oppgaven.

Teorem 14.2 (forkortet)

Løsningsmengden til en homogen, annenordens differensiallikning

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

er et to-dimensjonalt, reelt vektorrom utspent av to lineært uavhengige funksjoner. Vi har 3 ulike tilfeller:

1) $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ og $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
2) $y_1(t) = e^{at}\cos(bt)$ og $y_2(t) = e^{at}\sin(bt)$ hvis $\lambda_1 = a + bi,\ \lambda_2 = \bar{\lambda},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
3) $y_1(t) = e^{\lambda t}$ og $y_2(t) = te^{\lambda t}$ hvis $\lambda \in \mathbb{R}$

Strategi: ① Finne λ_i-ene
② Bruke teoremet

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = (-\lambda)^2 - 1\cdot(-1) = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\iff \lambda^2 = -1$$

$z = a + bi$

$a = 0,\ b = 1$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i \end{cases}$$

Basis

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{at}\cos(bt) \overset{a=0,\ b=1}{=} \cos(t) \\ y_2(t) = e^{at}\sin(bt) = \sin(t) \end{cases}$$

Fra teoremet vet vi at den generelle løsningen må være en lineærkombinasjon av løsningene. Dermed er den generelle løsningen:

Gen. løsn. $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \underline{\underline{c_1\cos(t) + c_2\sin(t)}}$

Oppgave 3 b)

Finn en partikulær løsning for

$$y'' + y = \cos(t)$$

I forrige oppgave så vi på en *homogen* andreordens diff.likning. Nå ser vi på en *inhomogene* andreordens diff.likningen:

$$y''(t) + y(t) = \cos(t)$$

For å finne en partikulær løsning, $y_p(t)$, bruker vi formelen i forelensingsnotatene (s. 3-4):

For en *inhomogen, annenordens differensiallikning*, dvs. en likning på formen

$$y''(t) + a_1 y(t) + a_0 y(t) = f(t),$$

kan vi finne en **partikulær løsning**, y_p, ved hjelp av følgende formel:

$$y_{p(t)} = y_2(t) \int \frac{y_1(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)} dt - y_1(t) \int \frac{y_2(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)} dt$$

$y_1(t)$ og $y_2(t)$ finner vi i den generelle løsningen for den homogene diff.likningen:

Fra forrige oppgave: $y_h(t) = c_1 \underbrace{\cos(t)}_{y_1(t)} + c_2 \underbrace{\sin(t)}_{y_2(t)}$

Vi skriver opp alle ledd vi skal fylle inn i formelen:

Her: $f(t) = \cos(t)$

$y_1(t) = \cos(t)$ $\quad$ $y_2(t) = \sin(t)$

$y_1(t) = -\sin(t)$ $\quad$ $y_2(t) = \cos(t)$

Deretter setter vi inn i formelen for $y_p(t)$:

$$y_p(t) = \sin(t) \int \frac{\cos(t) \cdot \cos(t)}{\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t))} dt - \cos(t) \int \frac{\sin(t) \cdot \cos(t)}{\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t))} dt$$

$$= \sin(t)\int \frac{\cos^2(t}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\,dt - \cos(t)\int \frac{\sin(t)\cdot\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\,dt$$

Herfra må vi bruke flere trigonometriske identiteter:

$$\boxed{\cos^2(t)+\sin^2(t)=1}$$

$$= \sin(t)\int \underbrace{\cos^2(t)}\,dt - \cos(t)\int \underbrace{\sin(t)\cos(t)}\,dt$$

Vi vet at:

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)$$

$$\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Vi setter inn i uttrykket for $y_p(t)$ og får at:

(*)

$$= \sin(t)\int \frac{1}{2}(\cos(2t)-1)\,dt - \cos(t)\int \frac{1}{2}\sin(2t)\,dt$$

$$= \sin(t)\left(\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{t}{2}\right) + \cos(t)\cdot\frac{1}{4}\cos(2t)$$

$$= \frac{1}{4}\sin(t)\cdot\sin(2t) + \frac{t}{2}\sin(t) + \frac{1}{4}\cos(t)\cos(2t)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin(t)\cdot\underbrace{\sin(2t)} + \cos(t)\cdot\underbrace{\cos(2t)}\right) + \frac{t}{2}\sin(t) \quad (**)$$

Vi vet at:

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$$

(**)

$$= \frac{1}{4}\left(\sin(t)\,2\sin(t)\cos(t) + \cos(t)\,(1-2\sin^2(t))\right) + \frac{t}{2}\sin(t)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{\cos(t)\,2\sin^2(t)} + \cos(t) - \cancel{\cos(t)\,2\sin^2(t)}\right) + \frac{t}{2}\sin(t)$$

$$= \underline{\frac{1}{4}\cos(t) + \frac{1}{2}t\sin(t)}$$

Ettersom $\frac{1}{4}\cos(t)$ er en homogen løsning (vi kan velge $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 0$) vil en partikulær løsning være $\frac{1}{2}t\sin(t)$.

Siden gen. løsn. er på formen $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
og $\frac{1}{4}\cos(t)$ er en homogen løsn. ($c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = 0$),
vil $\frac{1}{2}\sin(t)$ være en partikulær løsning.

Eksamen høst 2019

Oppgave 2

Finn løsningen til initialverdiproblemet

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}, \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$$

$$\text{IVB: } \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Løsningsfunksjonen er summen av homogen og partikulær løsning:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Vi begynner med å finne den generelle løsningen til den homogene likningen:

1 $y_h(t) = ?$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Den karakteristiske likningen er:

Kar. likn. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

Vi husker teorem 14.2 som ga oss løsningsmengden (løsningsfunksjonene). Vi er i tilfelle 1:

Teorem 14.2 (forkortet)

Løsningsmengden til en homogen, annenordens differensiallikning

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

er et to-dimensjonalt, reelt vektorrom utspent av to lineært uavhengige funksjoner. Vi har 3 ulike tilfeller:

4) $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ og $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
5) $y_1(t) = e^{at}\cos(bt)$ og $y_2(t) = e^{at}\sin(bt)$ hvis $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
6) $y_1(t) = e^{\lambda t}$ og $y_2(t) = te^{\lambda t}$ hvis $\lambda \in \mathbb{R}$

Dermed er den homogene løsningen:

$$\Rightarrow y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = \underline{c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}}$$

Før vi finner koeffisientene (vha. IVB-ene) skal vi finne en partikulær løsning. Ettersom det inhomogene leddet (e^{2t}, se oppgaveteksten) er en homogen løsning er det ikke så lett å gjette seg til en løsning. Derfor skal vi, denne gangen, benytte formelen:

$$\boxed{y_{p(t)} = y_2(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}dt - y_1(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}dt}$$

Vi skriver opp alle ledd vi skal sette inn:

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} = e^{t} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{2t}$$

$$y_1' = e^{t} \qquad y_2' = 2e^{2t}$$

$$f(t) = e^{2t}$$

$$y_p(t) = y_2 \int \frac{y_1 f(t)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}dt - y_1 \int \frac{y_2 f(t)}{y_1 y_2 - y_2 y_1'}dt$$

$$= e^{2t}\int \frac{e^{t}\cdot e^{2t}}{e^{t}2e^{2t} - e^{2t}e^{t}}dt - e^{t}\int \frac{e^{2t}e^{2t}}{e^{t}2e^{2t} - e^{2t}e^{t}}dt$$

$$= e^{2t}\int \frac{e^{3t}}{2e^{3t}-e^{3t}}\,dt - e^{t}\int \frac{e^{4t}}{2e^{3t}-e^{3t}}\,dt$$

$$= e^{2t}\int 1\,dt - e^{t}\int e^{t}\,dt$$

$$= te^{2t} - \cancel{e^{2t}}$$

Homogen løsning

Vi husker at e^{2t} er en homogen løsning, så vi kan se bort fra dette leddet. Dermed står vi igjen med følgende:

$$y(t) = \underline{c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + te^{2t}}$$

Vi bruker så initialverdibetingelsene til å finne koeffisienter c_1 og c_2:

$$\text{IVB}: \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(0) = c_1 e^{0} + c_2 e^{0} = 1 \iff \underline{c_1 + c_2 = 1}$$

$$y'(t) = c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} + e^{2t} + 2te^{2t} = 1$$

$$y'(0) = c_1 e^{0} + 2c_2 e^{2\cdot 0} + e^{2\cdot 0} + 2\cdot 0\cdot e^{2\cdot 0} = 1 \iff c_1 + 2c_2 + 1 = 1$$

$$\iff \underline{c_1 + 2c_2 = 0}$$

Vi får altså et likningssystem med 2 likninger og 2 ukjente som vi kan løse:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Vi setter inn i uttrykket for $y(t)$ og finner løsningsfunksjonen for initialverdiproblemet vårt:

$$\Rightarrow \underline{y(t) = 2e^{t} - e^{2t} + te^{2t}}$$

Eksamen vår 2017

Oppgave 2 a)

Finn to lineært uavhengige løsninger av den homogene differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

MÅL: Finne 2 lin. uavh. løsn.

Strategi: Finne λ_i-ene

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

abc-formel

$$z = a + bi$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 + i \\ \lambda_2 = -1 - i \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$y_1(t)$ og $y_2(t)$ er to lineært uavhengige løsninger. Disse er på følgende form og vi setter inn for $a = -1$ og $b = 1$:

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = e^{at}\cos(bt) = \underline{e^{-t}\cos(t)} \\ y_2(t) = e^{at}\sin(bt) = e^{-t}\sin(t) \end{cases} \quad \text{2 lin. uavh. løsn.}$$

Eksamen høst 2017

Oppgave 4

Likningen for en udempet tvungen harmonisk bevegelse er gitt ved

$$y''(t) + y(t) = \cos(t-2)$$

a) Finn den generelle løsningen til den homogene likningen.

$$y''(t) + y(t) = \cos(t-2)$$

I oppgave a) skal vi fnne den generelle løsningen til den homogene likningen. Den homogene likningen er

Hom. likn. $y_h''(t) + y_h(t) = 0$

I tråd med Teorem 14.2 finner vi først egenverdiene for så å skrive opp den generelle, homogene løsningen:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{cases}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \,,\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \xRightarrow{\text{Thm 14.2}} y_h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

b) Finn den generelle løsningen til den inhomogene likningen.

Nå skal vi finne den generelle løsningen til den *inhomogene* likningen, altså til:

$$y''(t) + y(t) = \cos(t-2)$$

Vi husker at den generelle løsningen av den inhomogene likningen er summen av homogen og partikulær løsning:

Gen. løsn. $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Den generelle løsningen av det homogene problemet fant vi i a), så det holder å finne en partikulær løsning.

↳ Nok å finne $y_p(t)$

I en tidligere oppgave brukte vi formelen fra forelesningsnotatene, men den er ikke så lett å huske… Derfor skal vi nå bruke en annen strategi – Vi skal nemlig gjette på en løsning av samme type som $f(t)$.

Strategi: Gjett $y_p(t) = a\cos(t-2) + b\sin(t-2)$

Vi finner $y_p''(t)$:

$$y_p''(t) = -a\cos(t-2) - b\sin(t-2)$$

Deretter setter vi inn for $y_p'(t)$ og $y_p''(t)$ i den originale differensiallikningen (altså den inhomogene), og vi håper å få at dette blir lik $\cos(t-2)$:

$$y'' + y = \underbrace{\cos(t-2)}_{f(t)}$$

$$\underbrace{-a\cos(t-2) - b\sin(t-2) + a\cos(t-2) + b\sin(t-2)}_{=0} \stackrel{?}{=} \underbrace{\cos(t-2)}_{\text{Ikke alltid } 0}$$

Men nå vil venstre side av likningen være 0, altså ikke $\cos(t-2)$. Dermed funker ikke denne $y_p(t)$-en. Vi må gjette noe annet. Vi legger til en faktor t i hvert ledd og prøver på nytt:

Prøver $y_p(t) = at\cos(t-2) + bt\sin(t-2)$

$$y_p''(t) = -2a\sin(t-2) - at\cos(t-2) + 2b\cos(t-2) - bt\sin(t-2)$$

Vi setter inn for y_p og y_p'' i den opprinnelige differensiallikningen:

$$y_p'' + y_p \stackrel{?}{=} \cos(t-2)$$

$$-2a\sin(t-2) - at\cos(t-2) + 2b\cos(t-2) - bt\sin(t-2)$$

$$+ at\cos(t-2) + bt\sin(t-2) \stackrel{?}{=} \cos(t-2)$$

Ettersom sinus og cosinus er lineært uavhengige kan vi sette koeffisientene til sinus-leddene på hver side av likhetstegnet lik hverandre OG koeffisientene til cosinus-leddene på hver side av likhetstegnet lik hverandre:

$$\begin{cases} \sin: -2a - \cancel{bt} + \cancel{bt} = 0 \\ \cos: -\cancel{at} + 2b + \cancel{at} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a = 0 \\ 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1/2 \end{cases}$$

Ettersom $a = 0$ forsvinner $at\cos(t-2)$ fra y_p og vi står kun igjen med følgende partikulære løsning:

$$\Rightarrow y_p(t) = \underline{\frac{1}{2}t\sin(2t)}$$

Den generelle løsningen på differensiallikningen er som kjent summen av den generelle løsningen til den *homogene* diff.likningen og den *partikulære* løsningen:

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = \underline{c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + \tfrac{1}{2}t\sin(t-2)}$$