

Plenumsregning 12: System av differensiallikninger

Ekstraoppgaver

Oppgave 2

Finn generell løsning av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ når

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix} \quad A\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}}' \quad (A\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{y}}'(t))$$

A er altså en reell 3×3 -matrise. Vi antar nå at A er diagonaliserbar. Da vet vi at det finnes en basis for \mathbb{R}^n bestående av egenvektorer for A (dette var et resultat fra kapittelet om diagonalisering):

$$A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Anta A diag. bar $\Rightarrow \exists$ basis for \mathbb{R}^3 bestående av egenvektorer for A

Vi antar nå at \mathbf{v} er en egenvektor for A med tilhørende egenverdi λ og setter $\mathbf{y}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$:

$$\vec{v} \text{ egenvektor m. egenverdi } \lambda, \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$$

Deretter deriverer vi $\mathbf{y}(t)$ og benytter oss av:

- definisjonen av egenvektor
- At $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$

$$\dot{\mathbf{y}}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \vec{v} = e^{\lambda t} \underbrace{\lambda \vec{v}}_{A\vec{v}} = e^{\lambda t} A\vec{v} = A(e^{\lambda t} \vec{v}) = A\dot{\mathbf{y}}(t)$$

Deretter observerer vi at $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ (altså differensiallikningen vår). Dette betyr at $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}$ er en løsning av differensiallikningen:

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{y}}'(t) = A\dot{\mathbf{y}}(t) \Rightarrow \dot{\mathbf{y}}(t) = e^{\lambda t} \vec{v} \text{ er en løsning av diff. likn.}$$

Mengden av alle løsninger til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ utgjør et reelt vektorrom (dette er vist i forelesningsvideoene). Dermed vet vi at lineærkombinasjoner av løsninger også er løsninger.

Mengden av løsninger til $\vec{y}' = A\vec{y}$ er et reelt vektorrom
 \Rightarrow lin. komb. av løsn. er også løsn.

Dette utgjør Teorem 13.8 fra kapittelnotatene:

Teorem 13.8

$A_{n \times n}$ diagonaliserbar,

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ lin.uavh. egenvektorer med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Da er

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en basis for løsningsrommet til $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$. Dvs.

$$c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

en generell løsning av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$.

Lin.komb. av
vektorene

- Plan:
- ① Finne λ_i -ene
 - ② Finne \vec{v}_i -ene
 - ③ Jhm 13.8 : Gen.løsn.

Vi begynner med å finne **egenverdiene** til A som røttene til det karakteristiske polynomet (utregning krever polynomdivisjon!), og **egenvektorene** som løsninger av de homogene likningssystemene:

$$\textcircled{1} \det(A - \lambda_i I) = 0 \quad \textcircled{2} (A - \lambda_i I) \vec{v}_i = \vec{0} \quad \text{for } i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deretter setter vi inn i likningen fra Teorem 13.8 for å finne den generelle løsningen av systemet av diff.likninger:

$$\textcircled{3} \text{ Jhm 13.8 : } \vec{y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \vec{v}_3 e^{\lambda_3 t}$$

$$\vec{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

Koeffisientene c_1, c_2, c_3 kommer fra eventuelle initialbetingelser, men det har vi altså ikke enda. Dette blir tema for neste oppgave.

Oppgave 3

Løs initialverdiproblemene $A\mathbf{y} = \mathbf{y}', \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ når

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrise A er fremdeles lik som i oppgave 2, men nå har vi i tillegg fått en initialverdibetingelse:

$$\underline{\text{MÅK}}: \text{ Løse IVP } A\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}}' \text{ m. } \dot{\mathbf{y}}_0 = \dot{\mathbf{y}}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_1, c_2, c_3 = ?$$

I forrige oppgave fant vi den generelle løsningen, $\mathbf{y}(t)$. Nå lurere vi på hva koeffisientene, c_1, c_2 og c_3 er, og vi skal bruke IVB til å finne ut av det. Vi setter inn for $t = 0$ og setter uttrykket lik $(1 \ 0 \ 0)^T$:

$$\dot{\mathbf{y}}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2 \cdot 0} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4 \cdot 0} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3 \cdot 0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 2 \end{cases}$$

Den spesielle/partikulære løsningen blir da:

$$\text{Spesiell løsn.} \quad \underline{\underline{\dot{\mathbf{y}}(t) = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}}}$$

Oppgave 1

Finn generell løsning av systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ og skissér faseplottet når

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \vec{y}' = A\vec{y} \quad A_{2 \times 2}$$

Vi skal skissere faseplottet til A . Det gjør vi ved å først finne den generelle løsningen til likningssystemet. Den generelle løsningen er jo, som kjent, avhengig av egenverdiene og egenvektorene til matrisen, så vi må finne dem.

$$\text{Gen.løsn. } \vec{y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Vi har 3 mulige tilfeller avhengig av egenverdiene til A :

3 muligheter:

$$\text{I) } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\text{II) } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} : \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$$

$$\text{III) } \lambda \in \mathbb{R}$$

Husk: Egenverdiene er røttene til det karakteristiske polynomet $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi regner ut disse først, og så ser vi hvilket tilfelle vi havner i:

$$\textcircled{1} \det(A - \lambda I) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Tilfelle I}$$

Vi har altså to distinkte reelle egenverdier og befinner oss i **tilfelle I**.

Vi finner så de tilhørende egenvektorene:

$$\textcircled{2} (A - \lambda_i I) \vec{v}_i = \vec{0} \quad \text{for } i \in \{1, 2\}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Den generelle løsningen er altså:

$$\textcircled{3} \text{Gen.løsn. } \vec{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Når vi nå skal tegne faseagrammet bruker vi følgende tabell (se kapitteinnotatene s. 5):

Faseagram: To distinkte, reelle røtter

λ	$e^{\lambda t}$	$ve^{\lambda t}$
> 0 (pos.)	øker	bort fra origo
$= 0$	konstant	står i ro
< 0 (neg.)	minker	mot origo

- Hvis λ er positiv, vil $e^{\lambda t}$ øke, og da vil leddet $ve^{\lambda t}$ bevege seg vekk fra origo.
- Hvis $\lambda = 0$, vil $e^{\lambda t}$ være konstant, og da vil leddet $ve^{\lambda t}$ stå i ro.
- Hvis λ er negativ, vil $e^{\lambda t}$ minke, og da vil leddet $ve^{\lambda t}$ bevege seg mot origo.

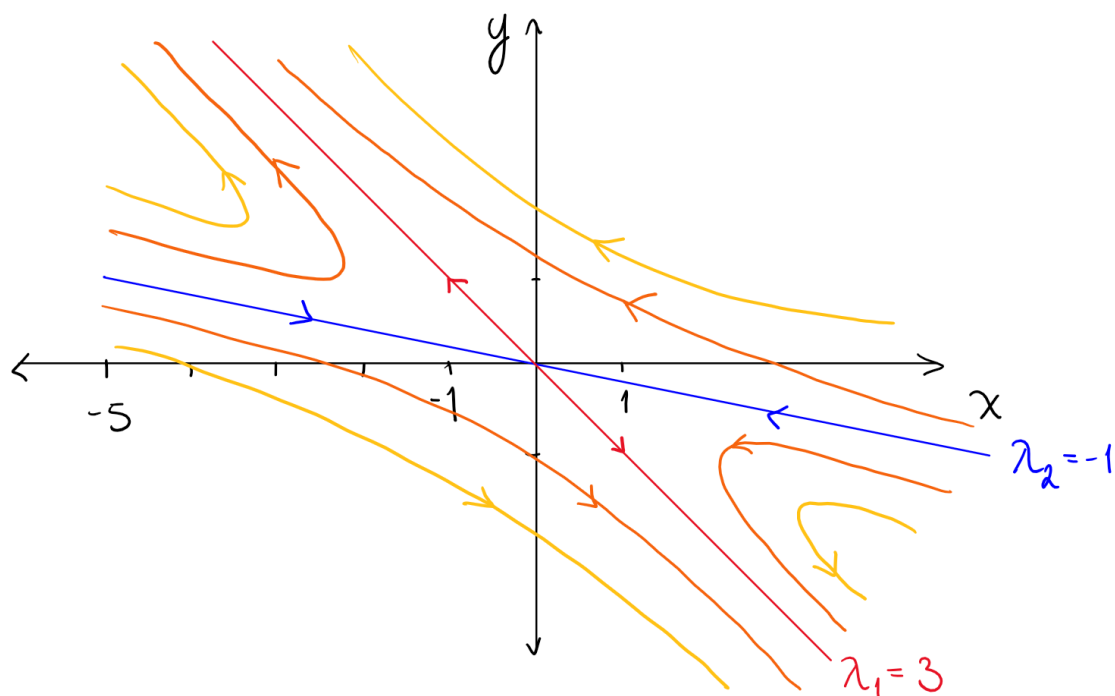
Vi har én positiv og én negativ egenverdi:

$$\lambda_1 = 3 > 0 \Rightarrow e^{3t} \text{ øker} \Rightarrow \vec{v}_1 e^{3t} \text{ går } \underline{\text{bort}} \text{ fra origo}$$

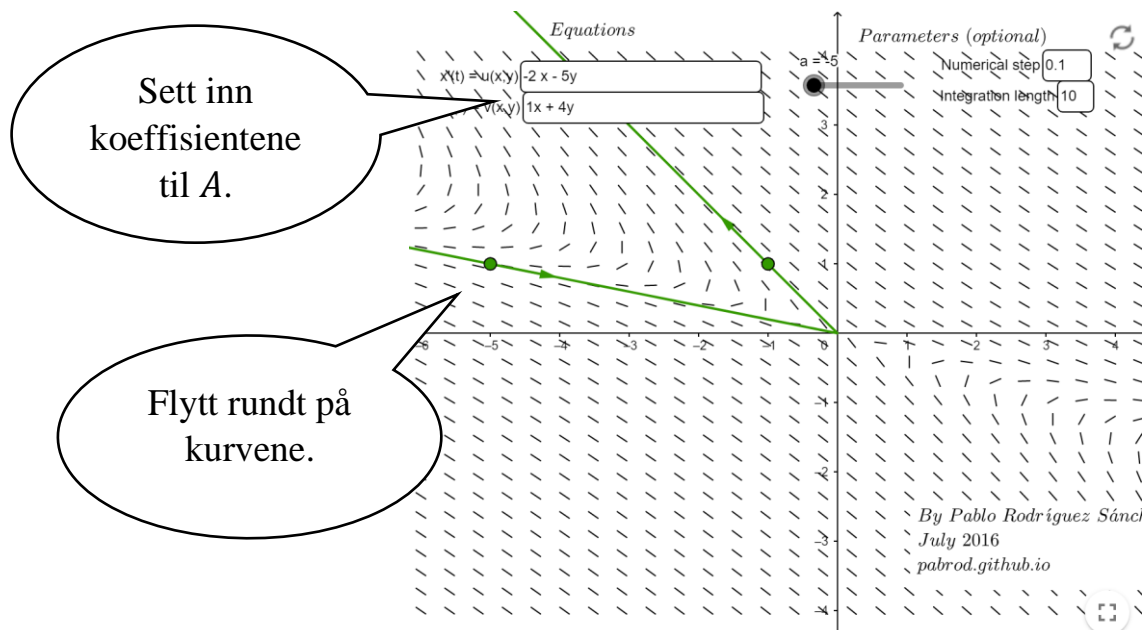
$$\lambda_2 = -1 < 0 \Rightarrow e^{-t} \text{ minker} \Rightarrow \vec{v}_2 e^{-t} \text{ går } \underline{\text{mot}} \text{ origo}$$

Hvordan tegne diagrammet i dette tilfellet:

- Tegn først linjer gjennom egenvektorene.
- Tegn inn deres bevegelser (bort fra/mot origo) som piler.
- Med en positiv og en negativ egenverdi vil de røde og de blå kurvene gå i motsatt retning. Dette gir oss en slags sadel.
- Vi kan tegne flere kurver (tilsvarende ulike initialbetingelser) ved å «følge bevegelsen til pilene».



Vi kan verifisere at vi har tegnet riktig ved å bruke GeoGebra
(<https://www.geogebra.org/m/utcMvuUy>):



$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Vi begynner med å finne den generelle løsningen vha. egenverdiene og egenvektorene til matrisen. Denne gangen går vi gjennom utregningen for egenverdiene for repetisjon:

$$\textcircled{1} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - (-2)3$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 3$$

$$a=1 \quad b=2 \quad c=3$$

abc-formel

$$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-1) \cdot 8}}{2} \downarrow \frac{-2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{8}}{2}$$

$$i^2 = -1$$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{i^2} = i$$

$$= \frac{-2 \pm i\sqrt{8}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 + i\sqrt{2} \\ \lambda_2 = -1 - i\sqrt{2} \end{cases}$$

$$z = \alpha + \beta i$$

$$\textcircled{2} (A - \lambda_i I) \vec{v}_i = \vec{0} \text{ for } i \in \{1, 2\}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 + i\sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 - i\sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Teorem 13.16

$\alpha + i\beta \neq 0$ kompleks egenverdi for A , \mathbf{v} tilhørende egenvektor.

Da danner

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\alpha t} (\operatorname{Re}(\mathbf{v}) \cdot \cos(\beta t) - \operatorname{Im}(\mathbf{v}) \cdot \sin(\beta t))$$

og

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{\alpha t} (\operatorname{Re}(\mathbf{v}) \cdot \sin(\beta t) + \operatorname{Im}(\mathbf{v}) \cdot \cos(\beta t))$$

en basis for reelt løsningsrom til

$$A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

Her kan vi velge den ene eller den andre egenvektoren, men det er vanlig å velge den med positiv imaginær del.

$$\operatorname{Re}(\vec{v}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \operatorname{Im}(\vec{v}_1) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1 + i\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{Thm 13.16}} \begin{cases} \vec{y}_1(t) = e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{2}t) - \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{2}t) \right) \\ \vec{y}_2(t) = e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{2}t) + \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \right) \end{cases}$$

Dermed blir den generelle løsningen som følger med \mathbf{y}_1 og \mathbf{y}_2 som ovenfor:

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{y}(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t)}}$$

Siden cosinus og sinus er involvert i løsningene, gir det mening at vi får en slags bølgende/sirkulær bevegelse. Vi setter opp en tilsvarende tabell som i stad (se kapittelnotater s. 7):

Fasediagram: To distinkte, komplekse røtter

$$z = \alpha + \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$

α	bevegelse
> 0 (pos.)	spiral <u>bort</u> fra origo
$= 0$	sirkulær
< 0 (neg.)	spiral <u>mot</u> origo

- Hvis α -leddet er positivt beveger spiralen seg bort fra origo
- Hvis α -leddet er 0 har vi en sirkulær løsning
- Hvis α -leddet er negativt beveger spiralen seg mot origo

Vi er i sistnevnte tilfellet fordi $\alpha = -1$:

$$\lambda_1 = -1 + i\sqrt{2} \Rightarrow \alpha < 1 \Rightarrow \text{spiral } \underline{\text{mot}} \text{ origo}$$

$$\lambda_2 = -1 - i\sqrt{2} \Rightarrow \text{—————||—————}$$

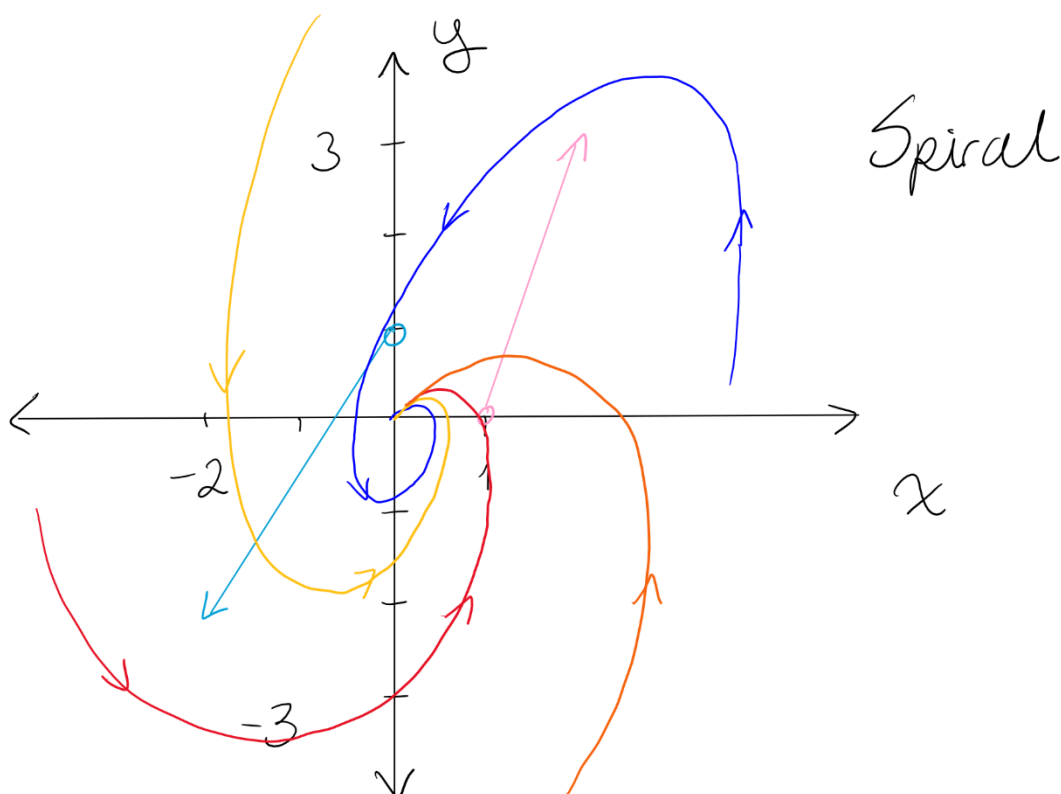
Løsningene kommer altså til å bevege seg i spiraler mot origo. Men hvilken vei?

- Vi regner ut $A\mathbf{u}$ for ulike punkter, gjerne $(1\ 0)^T$ og $(0\ 1)^T$, og tegner inn de resulterende vektorene som piler i punktene.
- Løsningene vil følge pilene.

Se kapittelnotater s. 7 for mer utfyllende forklaring.

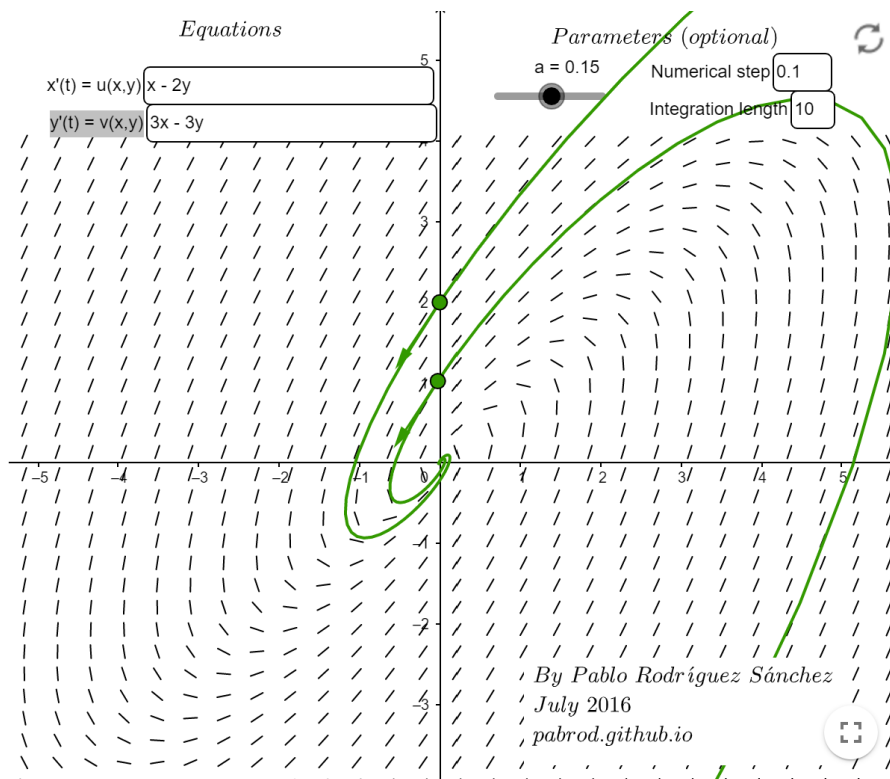
$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$



Igjen, ulike kurver kommer av ulike initialbetingelser.

Vi kan gjerne skissere løsningene i GeoGebra også for å sjekke at vi har tegnet riktig:



Oppgave 8

Vis at systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

Med en gitt initialverdi $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ har en entydig løsning.

Du kan anta at løsningsrommet er tredimensjonalt.

$$A\vec{y} = \vec{y}' \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

MÅN: Vise at $A\vec{y} = \vec{y}'$ m. IVB $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ har ENTYDIG LØSNING (nøyaktig én løsning for c_1, c_2, c_3)

Vi vet at den generelle løsningen avhenger av disse koeffisientene:

$$\text{Gen. løsn. } \vec{y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \vec{v}_3 e^{\lambda_3 t}$$

- PLAN:
- ① Finne gen. løsn. $\vec{y}(t)$
 - ② Bruke IVB: $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$
 - ③ Bruke et teorem

$$\text{① } \det(A - \lambda I) = 0 \iff (\lambda - 2)^2 (\lambda + 4) = 0$$

Husk: Dersom λ_i er en egenverdi til A , er den **algebraiske multiplisiteten** til λ_i lik dens orden (altså eksponenten) som rot i $\det(A - \lambda I_n)$.

Den **geometriske multiplisiteten** til en egenverdi er antall lineært uavhengige egenvektorer assosiert med den, dvs. dimensjonen til nullrommet av $(A - \lambda I_n)$.

Altså, egenverdien 2 har algebraisk multiplisitet to. Ved å løse det homogene likningssystemet finner vi to tilhørende lin. uavh. egenvektorer:

$\lambda_1 = 2$ alg. mult. 2 \rightarrow 2 lin. uavh. egenvektorer

$$(A - \lambda_1 I) \vec{v} = \vec{0} \implies \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = -4$ alg. mult. 1 \rightarrow 1 lin. uavh. egenvektor

$$(A - \lambda_3 I) \vec{v} = \vec{0} \implies \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Nå når vi har egenverdiene og egenvektorene har vi alt vi trenger for å skrive

$$\text{Gen. løsn. } \vec{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

Vha. IVB-en kan vi lage oss et likningssystem:

$$\textcircled{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_B \vec{c} = \vec{y}_0 \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Det vi nå ønsker å vise er at det finnes kun ett mulig sett av c_1, c_2 og c_3 . For å vise det skal vi tilbake til noen av de ekvivalente påstandene i Yndlingsteoremet vårt. Vi finner det forøvrig også i kapittelnotatene som Teorem 4.20:

Teorem 4.20 + 6.12 (utdrag fra «Yndlingsteoremet»)

$A_{n \times n}$, $\mathbf{b}_{n \times 1}$ vektor

- i) A inverterbar $\Leftrightarrow Ax = \mathbf{b}$ har en entydig løsning.
- ii) A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(B) = -6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad B \text{ inverterbar}$$

$$\Rightarrow B\vec{c} = \vec{y}_0 \text{ har en ENTYDIG LØSNING}$$

$$\hookrightarrow \text{M.a.o } \exists c_1, c_2, c_3$$

UNIKE skalarer som løser systemet

Eksamen høst 2018

Oppgave 3

Finn generell løsning av systemet

$$y_1' = 7y_1 - 2y_2$$

$$y_2' = 2y_1 + 2y_2$$

og skissér fasediagrammet.

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 2y_2 \end{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}}_{\vec{y}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\vec{y}}$$

MÅN: ① Finne gen.løsn.

② Skissere fase-diagram

$$\textcircled{1} \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(A - 6I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gen.løsn. $\vec{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}$

② Fase-diagram

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Fase-diagram: To distinkte, reelle røtter

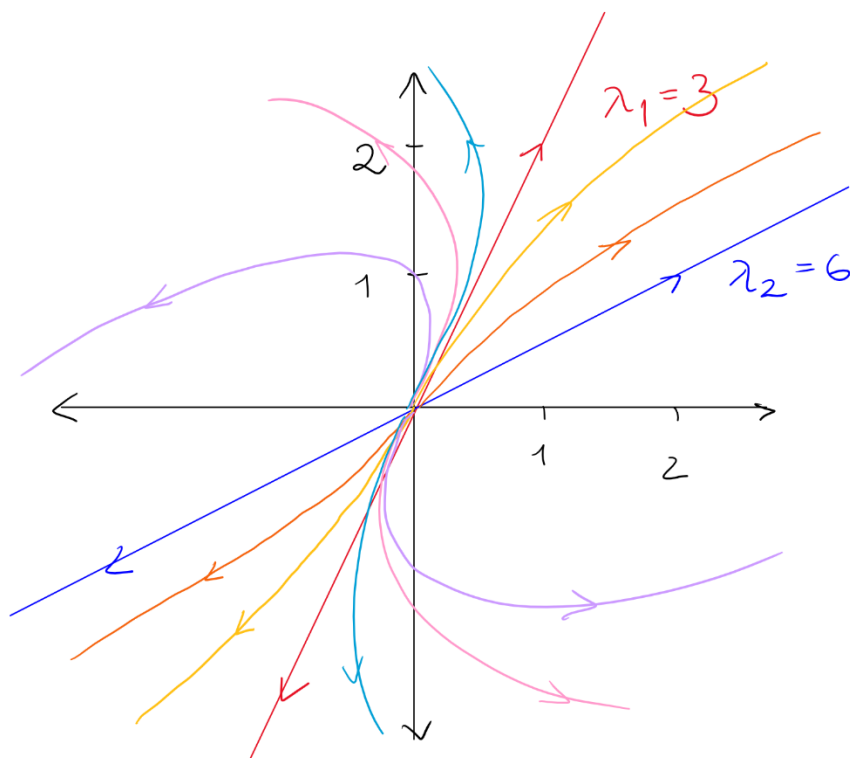
λ	$e^{\lambda t}$	$v e^{\lambda t}$
> 0	øker	bort fra origo
$= 0$	konstant	står i ro
< 0	minker	mot origo

$$\lambda_1 = 3 > 0 \Rightarrow e^{3t} \text{ øker} \Rightarrow \vec{v}_1 e^{3t} \text{ går bort fra origo}$$

$$\lambda_2 = 6 > 0 \Rightarrow e^{6t} \text{ øker} \Rightarrow \vec{v}_2 e^{6t} \text{ ———||———}$$

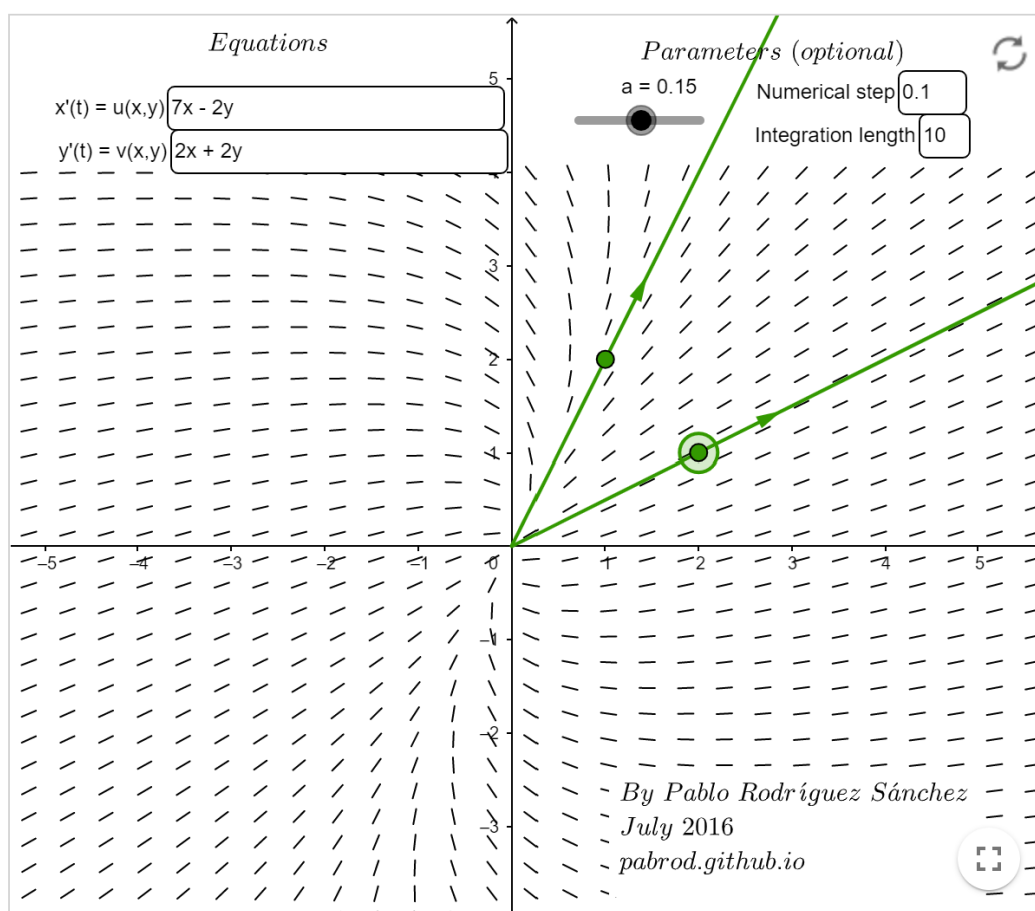
For å tegne fase-diagrammet:

- Tegn inn linjer gjennom egenvektorene (rød og blå).
- Tegn inn bevegelsen til linjene (vha. tabellen ovenfor).
- Ettersom $e^{6t} > e^{3t}$ vil løsningene tendere mot $v_2 e^{6t}$ (altså bevege seg mot den blå kurven) med økende t .



$$e^{6t} > e^{3t}$$

Igjen kan GeoGebra være et fint hjelpemiddel for å skissere løsningene. Tips: Flytt på prikkene for å se bevegelsene.



Eksamen vår 2017 (ikke gjennomgått)

Oppgave 6

$$\text{La } A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A .

$$\text{La } A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Vi finner egenverdiene til A som røttene til det karakteristiske polynomet:

$$\textcircled{1} \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -6 \end{cases}$$

Deretter finner vi egenverdiene som løsninger av de homogene likningssystemene:

$$\textcircled{2} (A - \lambda_i I) \vec{v} = \vec{0} \quad \text{for } i \in \{1, 2\}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

b) Løs initialverdioproblemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$$

og finn $\mathbf{x}(5)$.

$$\text{Løs IVP } \vec{x}'(t) = A \vec{x}(t) \text{ m. } \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Fra a) har vi all infoen vi trenger for å kunne skrive opp den generelle løsningen til IVP:

$$\text{Gen. løsn. } \vec{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-6t}$$

Vi bruker initialverdiene $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$ og får:

$$\vec{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \overset{=1}{e^{-0}} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{=1}{e^{-6 \cdot 0}} = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Dette gir oss et likningssystem med 2 ukjente, c_1 og c_2 :

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 150 \\ 2 & 1 & 50 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & -30 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 40 \\ c_2 = -30 \end{cases}$$

Vi setter inn for c_1 og c_2 og finner den spesielle løsningen:

$$\text{Spesiell løsn. } \vec{x}(t) = \underline{40 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-6t} - 30 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-6t}}$$

Til slutt finner vi $x(5)$:

$$\vec{x}(5) = 40 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-5} - 30 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-6 \cdot 5} \approx \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0.81 \\ 0.54 \end{bmatrix}}}$$