Plenumsregning 11: Interpolasjon, regresjon og Markov-kjeder

Eksamen høst 2018

Oppgave 4

Se på de tre punktene

$$\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix} \text{ i } \mathbb{R}^2.$$

a) Finn andregradspolynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom alle disse punktene.

$$A = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$$

a) Finne $p(x) = ax^2 + bx + c$ s.a.

$$\begin{cases} p(0) = -1 & \Leftrightarrow & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -1 \\ p(1) = 1 & \Leftrightarrow & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ p(2) = 7 & \Leftrightarrow & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow p(x) = 2x^2 + 0x - 1 = \underline{2x^2 - 1}$$

b) Bruk minste kvadraters metode til å finne førstegradspolynomet $q(x) = dx + e$ som passer til de tre punktene.

b) Finne $q(x) = dx + e$ som passer best til A, B, C

$$\begin{cases} q(0) = -1 & \Leftrightarrow & 0 \cdot d + e = -1 \\ q(1) = 1 & \Leftrightarrow & 1 \cdot d + e = 1 \\ q(2) = 7 & \Leftrightarrow & 2 \cdot d + e = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A_{3\times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} e \\ d \end{bmatrix}}_{x_{2\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\vec{b}_{3\times 1}}$$

Her har vi et likningssystem med flere likninger (3 stk) enn ukjente (2 stk, e og d), altså er systemet **overbestemt**.

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad A_{m\times n}, \quad m > n, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} e \\ d \end{bmatrix} = ?$$

Men dersom vi forsøker å løse systemet, ser vi at det ikke har noen løsning:

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right] \quad ⚡ \; 0 \neq 6$$

Vi kan altså ikke finneet førstegradspolynom som passer perfekt til punktene. Men, vi kan forsøke å finne en tilnærmet løsning. Vi løser oppgaven vha. **minste kvadraters metode** Dette er en teknikk for å finne tilnærmede løsninger til systemer som har flere likninger enn ukjente.

Definisjon

$\hat{\boldsymbol{x}}$ er den **minste kvadraters løsning** for $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Det følgende teoremet forteller oss hvordan vi finner minste kvadraters løsning:

Teorem 12.1 (forkortet)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

Da er mengden av minste kvadraters løsninger for $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lik løsningsmengden for

$$A^T(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$$

Hvis $A^T A$ inverterbar, finnes det for enhver $\boldsymbol{b}$ en unik minste kvadraters løsning $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Vi ganger ut, flytter over og løser:

$$\text{MKM: løse } A^T(A\vec{x} - \vec{b}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{A^T A}\,\vec{x} = \underbrace{A^T\vec{b}}$$

Først litt mellomregning:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

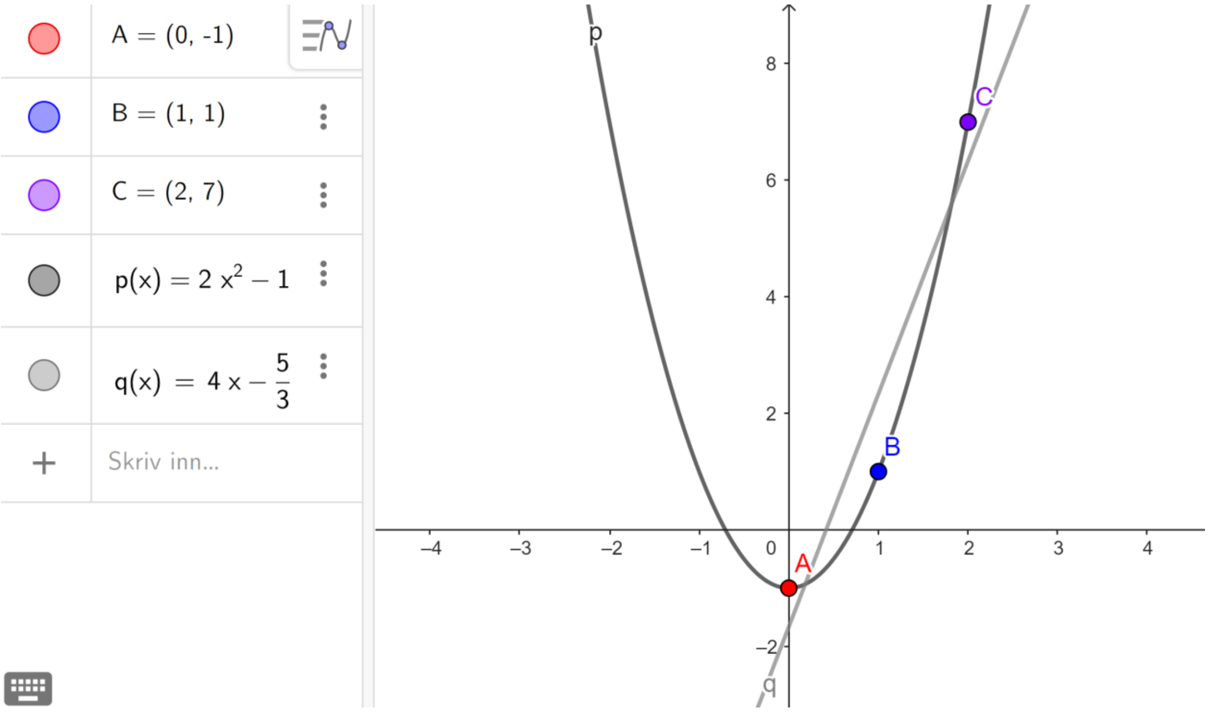
$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Vi setter inn for $A^T A$ og $A^T \vec{b}$, og løser systemet ved Gauss-eliminasjon:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 15 \\ 3 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} d = 4 \\ e = -5/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{q(x) = 4x - 5/3}}$$

c) Tegn grafene til p og q.



Ekstraoppgaver

Oppgave 4

Finn likevektsvektorene for de stokastiske matrisene

a) $C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Først må vi vite hva en sannsynlighetsvektor er, hva en likevektsvektorer er og hva stokastiske matriser er.

Definisjon

En **sannsynlighetsvektor** er en vektor $\boldsymbol{v} = [v_1 v_2 \ldots v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ hvor $0 \leq v_i \leq 1$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ og hvor $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 1$.

$M_{n \times n}$ er en **stokastisk matrise** hvis kolonnene i M er sannsynlighetsvektorer.

Altså, dersom alle komponentene er mellom 0 og 1 og summen av dem er 1, så har vi en sannsynlighetsvektor. En stokastisk matrise har sannsynlighetsvektorer som kolonner.

Definisjon

M stokastisk matrise.

En **likevektsvektor** $\boldsymbol{v}$ for M er en vektor som oppfyller følgende betingelser:

1) Er en egenvektor for M
2) Har tilhørende egenverdi $\lambda = 1$
3) En en sannsynlighetsvektor

Så, vi må finne egenvektoren som tilhører egenverdien 1. Oppgaveteksten gir at M er stokastisk, og vi antar at den faktisk har 1 som en av egenverdiene.

Finne $\vec{v}$ til $\lambda_1 = 1$ så. $A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}$

$$(A - 1I)\vec{v} = \vec{0} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -0.6 & 0.5 & 0.8 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0 & -0.9 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{3}{2} v_3 \\ v_2 = 1/5\, v_3 \\ v_3 = s, \; s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \text{La } s = 1: \; \vec{v}' = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Men når vi sjekker ser vi at denne vektoren IKKE har kolonnesum lik 1. Dermed er den heller ikke en likevektsvektor:

$\vec{v}'$ likevektsvektor $\Rightarrow v_1' + v_2' + v_3' = 1$

$$3/2 + 1/5 + 1 = \frac{27}{10} \neq 1$$

Vi vet jo at alle skalarmultipler av $\boldsymbol{v}$ er egenvektorer, så vi kan finne en skalarmultippel $\boldsymbol{u}$ av $\boldsymbol{v}'$ som ER en likevektsvektor ved å dele på kolonnesummen, 27/10:

$$\text{La } \vec{u} = \frac{\vec{v}\,'}{27/10} = \frac{10}{27}\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/54 \\ 10/135 \\ 10/27 \end{bmatrix}$$

Svar: $\vec{u}$ er en likevektsvektor for systemet

Vi kan også sette prøve på svaret vårt ved å sjekke at $\boldsymbol{u}$ faktisk er en egenvektor med egenverdi 1:

P: $C\vec{u} = 1\vec{u} = \vec{u}$ ✓

Eksamen vår 2019

Oppgave 5

Et emne i lineær algebra foreleses i to paralleller, en i S7 og en i S8. Begge foreleserne er like dårlige, og derfor bytter studenter parallell ofte. Sannsynligheten for at en student bytter parallell etter en gitt forelesningsuke er 40 %.

Bestem en stokastisk matrise M som beskriver denne prosessen. Parallellene er ved semesterstart satt opp med henholdsvis 180 og 140 studenter. Hvordan vil studentene fordele seg etter 14 forelesningsuker. Anta at studentene er svært pliktoppfyllende og at ingen slutter å gå i forelesning.

2 paralleller: S7, S8

P(B) - "Sannsyn. for å bytte parallell" = 0.4

Vi setter opp en tabell som viser de mulige utfallene for å finne M:

① Finne M

4 muligheter

Går til \ Start	S7	S8
S7	S7 → S7	S8 → S7
S8	S7 → S8	S8 → S8

Matrisen skal da ha følgende sannsynligheter:

$$M = \begin{bmatrix} P(S7 \to S7) & P(S8 \to S7) \\ P(S7 \to S8) & P(S8 \to S8) \end{bmatrix}$$

Vi regner ut:

$$P(S7 \to S7) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$
$$P(S7 \to S8) = P(B) = 0.4$$
$$P(S8 \to S7) = P(B) = 0.4$$
$$P(S8 \to S8) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Det neste vi skal gjøre er å finne fordelingen etter 14 uker, altså hvor mange studenter går da i S7 og hvor mange går i S8:

② Finne fordeling etter 14 uker

V. start: $\begin{cases} 180 \text{ studenter i } S7 \\ 140 \text{ studenter i } S8 \end{cases}$

Totalt antall studenter: $180 + 140 = \underline{320}$

Vi setter opp sannsynligheten for at en student går i en gitt parallell ved start:

$P(S7) =$ "Sannsyn. for at en student går i S7" $= \dfrac{180}{320}$

$P(S8) =$ " —— " —— S8" $= \dfrac{140}{320}$

Dermed kan vi lage sannsynlighetsvektoren $\boldsymbol{x}$:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 180/320 \\ 140/320 \end{bmatrix}$$ Sannsyn.vektor for fordelingen

Fordelingen etter 14 uker finner vi ved å prikke $\boldsymbol{x}$ med M 14 ganger. Det gjør vi effektivt ved å først diagonalisere M:

Fordelingen etter 14 uker: $M^{14}\vec{x}$

Strategi: $M = PDP^{-1}$

Denne gangen skriver vi bare opp matrisene D, P og P^{-1}, og dere kan selv regne dem ut 😊

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{14} = PD^{14}P^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^{14} & 0 \\ 0 & (1/5)^{14} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$M^{14}\vec{x} \approx \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 180/320 \\ 140/320 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160/320 \\ 160/320 \end{bmatrix} \begin{matrix} S7 \\ S8 \end{matrix}$$

Svar: Etter 14 uker er det omtrent like mange studenter i hver av parallellene, dvs ca. 160 i hver.

Eksamen kont 2018

Oppgave 5

I følge meteorolog Y_r eksisterer det et land N som er velsignet med mange ting, men ikke med solrikt vær. Det er aldri to dager med sol på rad. Dersom det er sol en dag, er det like stor sannsynlighet for at regner som at det snør påfølgende dag. Dersom det er snø eller regn en dag, er det like stor sannsynlighet for å få det samme været – som å ikke få det samme været – påfølgende dag. Dersom det er en endring fra snø eller regn fra en dag til den neste, er det bare halvparten av gangene sol påfølgende dag.

a) Hva er den stokastiske matrisen for denne markov-kjeden?

MÅL: lage stokastisk matrise

Vi har altså 3 typer vær; sol, regn og snø. Vi forkorter som følger:

$$\begin{cases} S = \text{Sol} \\ R = \text{Regn} \\ J = \text{Snø} \end{cases}$$

Deretter lager vi en tabell av de mulige tilfellene

Dag 2 \ Dag 1	S	R	I
S	$P(S\|S)$	$P(S\|R)$	$P(S\|I)$
R	$P(R\|S)$	$P(R\|R)$	$R(R\|I)$
I	$P(I\|S)$	$P(I\|R)$	$P(I\|I)$

Vi må nå lese oppgaveteksten nøye for å finne og eventuelt regne ut sannsynlighetene:

- Først, det er aldri sol to dager på rad, så sannsynligheten for dette er 0:

$$P(S|S) = 0$$

- Hvis det er sol en dag, så er sannsynligheten like stor for at det regner som for at det snør på dag 2. Denne verdien er foreløpig ukjent for oss, så vi kaller den bare x:

$$P(R|S) = P(I|S) = x$$

- Hvis det regner på dag 1, så er sannsynligheten like stor for å få det samme været, som å IKKE få det samme været på dag 2. Sannsynligheten $P(R|R)$ er foreløpig ukjent for oss, så vi kaller den y.

$$\underbrace{P(R|R)}_{=y} = P(\bar{R}|R)$$

- «IKKE regn» betyr enten sol eller snø. Videre, hvis det ER endring i vær, så er det bare halvparten av gangene at det er sol neste dag (rosa). Det eneste gjenværende alternativet er da snø, og da må også denne bli $y/2$ (lilla):

$$\underbrace{P(R|R)}_{=y} = P(\bar{R}|R) = \underbrace{P(S|R)}_{=y/2} + \underbrace{P(I|R)}_{=y/2}$$

- Det samme gjelder hvis det er snø på dag 1. Da er det like stor sannsynlighet for å få snø neste dag, som å IKKE få snø neste dag. Da er $P(I|I) = y$, $P(S|I) = y/2$ og $P(R|I) = y/2$:

$$\underbrace{P(I|I)}_{=y} = P(\bar{I}|I) = \underbrace{P(S|I)}_{=y/2} + P(R|I) \quad = y/2$$

Nå ser tabellen vår slik ut:

Dag 2 \ Dag 1	S	R	I
S	P(S|S)	P(S|R)	P(S|I)
R	P(R|S)	P(R|R)	P(R|I)
I	P(I|R)	P(I|R)	P(I|I)

Dag 2 \ Dag 1	S	R	I
S	0	y/2	y/2
R	x	y	y/2
I	x	y/2	y

Ettersom vi vet at summen av hver kolonne skal være 1 kan vi regne ut verdien til x og y:

$$0 + x + x = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 0.5$$

$$y/2 + y + y/2 = 1 \Leftrightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = 0.5 \wedge y/2 = 0.25 = y/2$$

Dermed får vi matrisen:

Dag 2 \ Dag 1	S	R	I
S	0	0.25	0.25
R	0.5	0.5	0.25
I	0.5	0.25	0.5

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

b) På lang sikt, hvor mange dager – av alle (i %) – er det sol?

Så, hvor ofte er det sol? Vi løser oppgaven ved bruk av et teorem:

Teorem 12.1

> M_{nxn} regulær, stokastisk.
>
> Da har M en unik likevektsvektor $\boldsymbol{q}$.
>
> For enhver utgangssannsynlighetvektor $\boldsymbol{x}_0$ konvergerer markovkjeden $\{\boldsymbol{x}_n\}$ til $\boldsymbol{q}$ når $n \to \infty$

For å vite om vi kan bruke teoeremet, må vi først sjekke at betingelsene er oppfylt (altså om M faktisk er regulær).

PLAN:

1. A regulær?
2. Finne likevektsvektor for A

Det første vi gjør er å sjekke at M er regulær, og da må vi vite hva det betyr:

Definisjon

> En stokastisk matrise M kalles **regulær** hvis det finnes n slik at alle elementene til M^n er strengt positive.

1. $$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.1875 & 0.1875 \\ 0.375 & 0.4375 & 0.375 \\ 0.375 & 0.375 & 0.475 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A$ regulær ✓

Så, alle komponentene er strengt positive og A er regulær.

Deretter finner vi likevektsvektoren med egenverdi $\lambda = 1$, ved å løse følgende homogene likningssystem:

2. $\lambda_1 = 1$ $\qquad (A - 1I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & -0.5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Vi trenger jo bare én likevektsvektor, så vi kan finne en ved å fiksere en s:

$$\text{La } s = 1 \Rightarrow \vec{v}' = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Men her er kolonnesummen ULIK 1:

$$v_1' + v_2' + v_3' = 0.5 + 1 + 1 = 2.5$$

Vi lager så en likevektsvektor ved å få kolonnesummen til å bli 1. Deretter kan vi lese av hvor ofte det er sol:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}'}{2.5} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} S \\ R \\ I \end{array} \Rightarrow \text{Sol } 20\% \text{ av dagene}$$