Plenumsregning 10: Egenvektorer, egenverdier og **diagonalisering**

Oppgave 1

For

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1) Finn **egenverdien(e)** til A
2) Finn **egenvektorene** til A
3) Avgjør om A er **diagonaliserbar**
4) Dersom A er diagonaliserbar, finn P og D slik at $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene til A er nullpunktene til det karakteristiske polynomet, dvs løsninger av likningen det(A - λI) = 0:

① Egenverdier $\Leftrightarrow \det(A-\lambda I)=0$

$$\det(A-\lambda I) = \left| \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right| = (3-\lambda)\left((-\lambda)^2-(-1)\cdot 1\right)$$

$$= \underbrace{(3-\lambda)}\underbrace{(\lambda^2+1)} = 0$$

$+ \quad \div \quad +$

$3-\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda^2+1=0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \qquad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = i \\ \lambda_3 = -i \end{cases}$

Den reelle matrisen A har altså 3 (komplekse) egenverdier. Vi finner de tilhørende egenvektorene til A:

② Egenvektorer $\Leftrightarrow (A-\lambda_i I)\vec{x}_i = 0 \quad \forall\ i \in \{1,2,3\}$

i) $\boxed{\lambda_1 = 3}$ $\quad (A-3I)\vec{x} = \vec{0} \implies \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii) $\boxed{\lambda_2 = i}$ $\quad (A-iI)\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

iii) $\boxed{\lambda_3 = -i}$ $\quad (A - (-i)I)\vec{z} = \vec{0}$

Mellomregning:

$i(-i) = -i^2 = 1$ $\quad (i^2 = -1)$

$(3+i)(3-i) = 3^2 + \cancel{3i} - \cancel{3i} - i^2 = 9+1 = 10$ $\quad (i^2 = -1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-i) \\ \\ (3-i) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \cdot(1/10) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 + iz_2 = 0 \\ z_2 = s \quad s \in \mathbb{C} \\ z_3 = 0 \end{cases}$$

Egenvektorene tilhørende egenverdien $-i$ er alle vektorer på følgende form, foruten nullvektoren (for å være helt presise må vi altså ekskludere skalaren 0 når vi bestemmer egenvektorene):

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

For å finne én egenvektor fikserer vi en skalar s:

La $s = 1$ $\qquad \vec{z}' = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Deretter skal vi avgjøre om A er diagonaliserbar:

3 A diagonaliserbar?

Definisjon

$A_{n\times n}$ **diagonaliserbar** hvis $A = PDP^{-1}$ m. P inverterbar, D diagonal.

Teorem 11.3

$A_{n\times n}$ n forskjellige egenverdier $\Rightarrow A$ diagonaliserbar.

I første del av oppgaven fant vi 3 ulike egenverdier for A. Dermed kan vi konkludere med at A er diagonaliserbar.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \xRightarrow[11.3]{\text{Thm}} A \text{ diagonaliserbar}$$

Til slutt finner vi matrisene P og D som diagonaliserer A:

4 Finn $P_{3\times3}$ og $D_{3\times3}$ s.a. $A = PDP^{-1}$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$P = [\vec{x} \mid \vec{y} \mid \vec{z}] = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For å verifisere at vi har regnet riktig kan vi finne den inverse matrisen, P^{-1}, og kontrollere at $A = PDP^{-1}$:

$$[P \mid I] \sim [I \mid P^{-1}] \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -i/2 & 1/2 & 0 \\ i/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Sjekk: } A = PDP^{-1}}$$

Oppgave 4

La $T: P_2 \rightarrow P_2$ være lineærtransformasjonen som deriverer andregradspolynomer:

$$T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$.

$$P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \text{ skalar}\}$$

$$T: P_2 \rightarrow P_2$$

$$T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

a) Finne $A_{3\times 3}$ så $J(p) = Ap$ for $p \in P_2$

mhp $\beta = (1, x, x^2)$

Standardmatrisen A for lineærtransformasjonen er bestemt ut fra hva den gjør med basisvektorene:

$$A = \left[[J(1)]_\beta \quad [J(x)]_\beta \quad [J(x^2)]_\beta \right]$$

Vi starter med å finne ut hva transformasjonen gjør med den første basisvektoren, altså deriverer vi polynomet 1:

$$J(1) = (1)' = 0$$

Deretter uttrykker vi det resulterende polynomet som en lineærkombinasjon av basisvektorene. Dette lar oss finne koordinatvektoren $[T(1)]_\beta$:

$$0 = \overset{c}{0} \cdot 1 + \overset{b}{0} \cdot x + \overset{a}{0} \cdot x^2 \Rightarrow [J(1)]_\beta = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OBS: Legg merke til rekkefølgen på koordinatene! Disse må stemme overens med rekkefølgen i basisen (konstantledd først).

Vi gjentar prosessen for de resterende basisvektorene:

$$J(x) = (x)' = 1$$

$$1 = \overset{c}{1} \cdot 1 + \overset{b}{0} \cdot x + \overset{a}{0} \cdot x^2 \Rightarrow [J(x)]_\beta = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x^2) = (x^2)' = 2x$$

$$2x = \overset{c}{0} \cdot 1 + \overset{b}{2} \cdot x + \overset{a}{0} \cdot x^2 \Rightarrow [J(x^2)]_\beta = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dermed gjenstår bare å fylle inn kolonnene i A:

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar?

b) 1 Finne egenverdiene til A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{matrix} + \\ \div \\ + \end{matrix} \left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = (-\lambda)\left((-\lambda)^2 - 2 \cdot 0\right) = (-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 0}$$

② Finne egenvektorene til A

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \overset{\lambda=0}{\Longleftrightarrow} A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = s, \ s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s \quad \forall \ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

③ A diagonaliserbar?

Teorem 11.2

$A_{n \times n}$ diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ A har n lineært uavhengige egenvektorer.

A er en 3×3-matrise, men A har IKKE 3 lineært uavhengige egenvektorer.

A har <u>IKKE</u> 3 lin. uavh. egenvektorer

Altså er ikke A diagonaliserbar:

$\overset{\text{Thm 11.2}}{\Longrightarrow}$ <u>A IKKE</u> diag.bar

Oppgave 8

La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \bar{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være en 2×2-matrise med $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$. Utled en formel for egenverdiene til A. Vis at egenverdiene er reelle.

La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \bar{z} & r_2 \end{bmatrix}$ $\quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$

<u>Mål:</u> ① Finne formel for λ_1 og λ_2

② Vise at $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Som vanlig finner vi egenverdiene som røttene til det karakteristiske polynomet, dvs. løsninger av andregradslikningen det(A - λI) = 0:

1 $\det(A-\lambda I)=0$

$$\left|\begin{bmatrix} r_1-\lambda & z \\ \bar{z} & r_2-\lambda \end{bmatrix}\right| = (r_1-\lambda)(r_2-\lambda) - z\cdot\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1r_2 - r_1\lambda - r_2\lambda + \lambda^2 - z\cdot\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (r_1+r_2)\lambda + r_1r_2 - z\bar{z} = 0$$

$a=1 \quad b=-(r_1+r_2) \quad c = r_1r_2 - z\cdot\bar{z}$

$b = -r_1 - r_2$

Vi bruker så abc-formelen:

abc-formel:

$$\lambda = \frac{-(-r_1-r_2) \pm \sqrt{(-r_1-r_2)^2 - 4\cdot 1(r_1r_2 - z\cdot\bar{z})}}{2\cdot 1}$$

$$\lambda = \frac{r_1+r_2 \pm \sqrt{r_1^2 + \cancel{2r_1r_2} + r_2^2 - \cancel{4r_1r_2} + 4z\cdot\bar{z}}}{2}$$

-2

Vi gjenkjenner 2. kvadratsetning, og finner dermed en eksplisitt formel for egenverdiene:

$$\lambda = \frac{r_1+r_2 \pm \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 + 4z\bar{z}}}{2}$$

2. □-setning

$$\lambda = \frac{r_1+r_2 \pm \sqrt{(r_1-r_2)^2 + 4z\cdot\bar{z}}}{2}$$

Nå skal vi vise at egenverdiene er reelle. Dette innebærer å vise at det som står under rottegnet er positivt (er det negativt får vi komplekse løsninger):

$$\overbrace{(r_1-r_2)^2 + 4z\bar{z}}^{*} \geq 0$$

- Ettersom $(r_1 - r_2)^2$ er et kvadrat MÅ dette leddet være positivt.
- Videre, $z \cdot \bar{z}$ er kvadratet av absoluttverdien til z, og dermed også positivt (se kapittel 1 om komplekse tall, s. 3).

$(r_1 - r_2) \geq 0$
(kvadrat)

$4z \cdot \bar{z} \geq 0?$ $\begin{cases} z = a+bi \\ \bar{z} = a-bi \end{cases}$

$4z \cdot \bar{z} = 4(a+bi)(a-bi) = 4(a^2+b^2)$
$= 4|z|^2 \geq 0$

Siden alle leddene under rottegnet er positive må også summen av dem være positiv:

$\Rightarrow (*) \geq 0$

Vi kan derfor konkludere med at egenverdiene må være reelle:

Svar: Alle λ må være reelle fordi vi IKKE tar rota av negative tall

Eksamen kont 2019

Oppgave 5

Finn en eksplisitt formel for A^n når $n \geq 0$ og

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

La $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$

<u>MÅL</u>: Eksplisitt formel for A^n, $n \geq 0$

Vi antar nå at A er diagonaliserbar (dette får vi verifisert senere når vi regner ut at A har to forskjellige egenverdier, ref Teorem 11.3):

Anta A diag. bar. $\Rightarrow A = PDP^{-1}$

Vi skal illustrere at den diagonale formen enkelt lar oss regne ut multipler av A:

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$$

Se f.eks. på A^2:

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} = P\underbrace{DID}_{D^2}P^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Slik fortsetter det hele veien til A^n:

$$\vdots$$

$$\Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}, \quad n \geq 0$$

Dette kan vi bruke for å finne en eksplisitt formel for A^n. Planen er som følger:

PLAN: Finne

1) $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

2) $P = [\vec{v}_1 \,\vdots\, \vec{v}_2]$

3) P^{-1}

Vi finner først egenverdiene og matrise D:

1) $\det(A - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \#$

$\Rightarrow A$ diag.bar

$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Vi har nå verifisert at A har forskjellige egenverdier, og dermed vet vi nå at A er diagonaliserbar. Vi finner så egenvektorene og matrise P:

2) $\boxed{\lambda_1 = 2}$ $\quad (A - 2I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ $\quad (A - (-1)I)\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P = [\vec{x} \,\vdots\, \vec{y}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Og vi finner inversen til P:

③ $$[P\,|\,I] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\underbrace{\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}}_{=I} \qquad \underbrace{\begin{matrix}-2 & -1\\-1 & -1\end{matrix}}_{=P^{-1}}$$

Til slutt skriver vi opp formelen for A^n:

$$\Rightarrow \underline{A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}$$

Oppgave 6

Skriv ned definisjonen av en diagonaliserbar kvadratisk matrise. Vis at en diagonaliserbar 2×2-matrise med egenverdi med algebraisk multiplistet to må være diagonal.

Definisjon

$A_{n\times n}$ er **diagonaliserbar** hvis $\exists D_{n\times n}$ diagonal og $P_{n\times n}$ inverterbar s.a.

$$A = PDP^{-1}$$

Definisjon (forkortet)

Et n-te gradspolynom har n komplekse løsninger (når vi teller med multiplisitet). Når λ_k er en løsning til det karakteristiske polynomet med multiplisitet m, sier vi at λ_k er en egenverdi med **algebraisk multiplisitet** m.

<u>Vet</u>: $A_{2\times 2}$ diag.bar
λ alg. mult. 2

<u>Å vise</u>: A diagonal

At A er diagonaliserbar og har en egenverdi λ med multiplisitet 2 betyr at at det finnes en diagonalmatrise D med egenverdien langs diagonalen. Vi skriver:

① A diag.bar $\wedge$ λ alg. mult. 2 $\Rightarrow \exists D_{2\times 2}$ diagonal s.a.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda I \qquad \Rightarrow D = \lambda I$$

Videre, at A er diagonaliserbar betyr også at da finnes en inverterbar matrise P slik at $D = P^{-1}AP$:

② A diag.bar $\Rightarrow \exists\, P_{2\times 2}$ inverterbar s.a.

$$A = PDP^{-1}$$

$$AP = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}$$

$$AP = PD$$

$$\underbrace{D}_{\lambda I} = P^{-1}AP$$

$$\lambda I = P^{-1}AP$$

$$\underbrace{\lambda I P^{-1}}_{P^{-1}} = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{I}$$

$$\lambda P^{-1} = P^{-1}A$$

$$P\lambda P^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_{I}A$$

$$\lambda \underbrace{PP^{-1}}_{I} = A$$

$$\underbrace{\lambda I}_{D} = A$$

$D = A$ og A er diagonal $\square$

Dermed har vi vist at A er lik D og (per definisjon av D) diagonal.

Eksamen høst 2018

Oppgave 7

La R være følgende matrise:

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Regn ut R^{42}.

Mål: Finne R^{42}

Alt 2: Skrive R på en lur måte

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \cos(\pi/3) = 1/2 \qquad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \qquad \Rightarrow R = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}$$

Vi kjenner igjen R som en rotasjonsmatrise (se https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix) som roterer vektorer med en vinkel på π / 3 med klokka:

$R\vec{v}$: R roterer $\vec{v}$ m. $\theta = \pi/3$ med klokka

Å rotere med π /3 seks ganger tilsvarer en hel runde – dvs. det svarer til å ikke gjøre noe. En vektor som prikkes med R seks ganger resulterer altså i den samme vektoren. Med symboler:

$(\pi/3) \cdot 6 = 2\pi$ (En runde, tilbake til start)

$$R^6 \vec{v} = \vec{v} \qquad \forall \ \vec{v}_{2\times 1}$$

$$\Rightarrow R^6 = I_2$$

Vi skulle finne R^{42} og kjenner igjen 42 som en multippel av 6:

$$R^{42} = R^{6\cdot 7} = (R^6)^7 = I_2^7 = I$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R^{42} = I_2}}$$

Eksamen høst 2014

Oppgave 4 (forkortet)

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Avgjør om A er diagonaliserbar.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Legg merke til at A er en symmetrisk matrise:

Definisjon

En reell matrise kalles **symmetrisk** dersom $A = A^T$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Fra Teorem 11.14 vet vi (blant annet) at A er diagonaliserbar:

Teorem 11.14

La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da har A n reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og A er diagonaliser (som en reell matrise).

$A = A^T \overset{\text{Thm 11.14}}{\Longrightarrow} A$ diagonaliserbar

b) Finn en ortonormal basis av egenvektorer for A.

Først må vi finne egenverdiene og egenvektorene til A:

b) $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 3)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \lor \lambda_2 = 3$ (alg. mult. 2)

$$(A - 0I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \qquad v_2 = s \qquad v_3 = t \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \forall\ s,t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deretter lager vi en orto***gonal*** basis av egenvektorer:

Ortogonal basis:

Fra Teorem 11.16 vet vi at $\boldsymbol{v}_1$ er ortogonal på $\boldsymbol{v}_2$ og $\boldsymbol{v}_3$ – Dette fordi de er egenvektorer til forskjellige egenverdier:

Teorem 11.16

> La A være en reell symmetrisk $n \times n$-matrise. Egenvektorene til A tilhørende to distinkte egenverdier er ortogonale.

A symmetrisk $\Rightarrow$ $\vec{v}_1$ ortogonal på $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$

Vi ortogonaliserer så $\boldsymbol{v}_2$ og $\boldsymbol{v}_3$ vha. Gram-Schmidt:

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_3}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Til slutt normaliserer vi vektorene for å finne en orto***normal*** basis av egenvektorer:

Ortonormal basis:

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{3} \qquad \|\vec{u}_2\| = \sqrt{2} \qquad \|\vec{u}_3\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \vec{w}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{w}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|} = \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$$

D er matrisen med egenverdiene langs diagonalen:

$$\text{c)}\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

P er matrisen med egenvektorene som kolonner:

$$P = [\vec{\omega}_1 \mid \vec{\omega}_2 \mid \vec{\omega}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{6}/6 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{6}/6 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$$

Ettersom P er en ortogonal matrise, vet vi (fra kapittel 11 om diagonalisering, s. 6) at $P^{-1} = P^T$:

$$P^{-1} = P^T$$

P ortogonal

Dermed kan vi skrive A som følgende produkt:

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = PDP^T}}$$