Plenumsregning 9: Egenverdier, egenvektorer og egenrom

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

a) Regn ut egenverdiene, egenvektorene og egenrommene til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Skissér egenrommene.

a) Finn egenverdier, egenvektorer og egenrom

Definisjon

$T: V \to V$ lin.trans.

En skalar λ er en **egenverdi** for T hvis $\exists \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ s.a.

$$T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v}$ er da en **egenvektor** for T, *tilhørende* λ.

Dersom T er gitt ved en matrise $n \times n$-matrise A sier vi at $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor for A *tilhørende* egenverdien λ.

Egenverdiene er altså skalarer (reelle eller komplekse) som oppfyller likningen $T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$. Vi husker at effekten av lineærtransformasjon kan beskrives vha. en matrise. Altså er det å løse likningen $T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ ekvivalent med å løse matriselikningen $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = ? \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = ?$$

$$\neq \vec{0}$$

$$A\vec{v} - \lambda I_2 \vec{v} = \vec{0} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I_2)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}\underbrace{\begin{matrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{matrix}}_{B_{2\times 2}} & & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\end{array}\right]$$

Teorem V1

Gitt en $n \times n$-matrise B:

$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har kun triviell løsning $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}) \Leftrightarrow \det(B) \neq 0$

$\Rightarrow$

Teorem V2

Gitt en $n \times n$-matrise B:

$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har ikke-trivielle løsninger $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}) \Leftrightarrow \det(B) = 0$

Vi er ute etter ikke-trivielle løsninger (ettersom nullvektoren ikke kan være en egenvektor), og dermed forsøker vi å finne ut når determinanten til matrisen er 0.

For hvike λ er $\det(B) = 0$?

$$\det(B) = \left|\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix}\right| = (1-\lambda)(-\lambda) - 0$$

$$= \lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \det(B) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \lor \lambda_2 = 1$$

b) Finne E_{λ_1} og E_{λ_2}

Definisjon

$T: V \to V$ lin.trans.

λ egenverdi for T.

Da er **egenrommet** til λ *mengden av alle egenvektorer til λ og $\boldsymbol{0}$:*

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

Finne $\vec{u}$ s.a. $T(\vec{v}) = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow A\vec{u} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$

i) $\boxed{\lambda_1 = 0}$ $\quad (A - \lambda_1 I_2)\vec{u} = \vec{0} \quad \vec{u} = ?$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} s \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$$

La $s = 1$: $\quad E_0 = \text{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ "y-aksen"

ii) $\boxed{\lambda_2 = 1}$ $\quad (A - \lambda_2 I_2)\vec{v} = \vec{0} \quad \vec{v} = ?$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

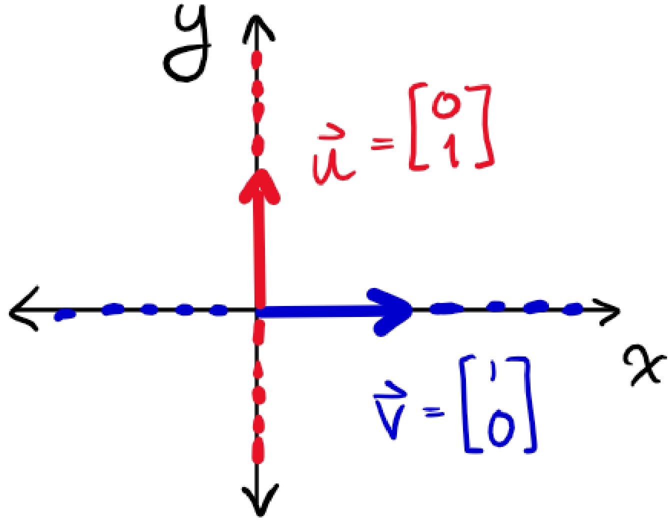
$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = t \\ -v_2 = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

da $t=1$: $E_1 = Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ "x-aksen"

Egenrommene spennes altså ut av vektorene (1,0) og (0,1), som tilsvarer henholdsvis x-aksen og y-aksen:

b)



Oppsummering

1) Finne *egenverdier* ved å løse $\det(A-\lambda I)=0$.
2) Finne *egenvektorer* ved å løse $(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.
3) *Egenrommet* tilhørende en gitt egenverdi kan beskrives som spennet av egenverdiens tilhørende egenvektor(er).

Oppgave 3

Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke.
Begrunn svaret ditt.

a) En $n \times n$-matrise A har alltid n egenverdier.

P1: "En matrise har alltid n egenverdier"

Egenverdiene λ_i er løsningene til $\underbrace{\det(A-\lambda_i I)=0}_{\in P_2}$ for $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

dersom $A_{2\times 2}$

Det er kjent at et 2. gradspol. har 0, 1, 2 (reelle) løsninger $\Rightarrow$ P1 USANN

Vi kan også argumentere mer generelt om at et n-te gradspolynom har mellom 0 og n løsninger.

b) Dersom A har en ikke-null egenverdi λ, så kan ikke A være lik null-matrisen.

Nullmatrise

P2: "A m. egenverdi $\underbrace{\lambda \neq 0} \Rightarrow A \neq O$"

Anta $\lambda \neq 0$

λ egenverdi $\Rightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{0}$ s.a. $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$$\begin{array}{ccc} A\vec{x} & = & \lambda\vec{x} \\ \neq & & \underbrace{\neq \quad \neq} \\ \vec{0} & & 0 \qquad \vec{0} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \neq \vec{0}$

- $\boldsymbol{x}$ er pr def av egenvektor ulik $\mathbf{0}$.
- λ er per antakelse ulik $\mathbf{0}$.
- Dermed er høyre side av likningen forskjellig fra $\mathbf{0}$.

For å ikke få en motsigelse må altså venstre side av likningen, $A\boldsymbol{x}$, også være forskjellig fra $\mathbf{0}$. Da kan ikke A være nullmatrisen (hvis A var nullmatrisen ville venstre side blitt $\mathbf{0}$):

$\Rightarrow A \neq O$

$\Rightarrow$ P2 **SANN**

c) To egenvektorer til en matrise A som svarer til samme egenverdi kan være lineært uavhengige.

P3: "$\vec{x}, \vec{y}$ egenvektorer for A m. samme egenverdi λ
$\Rightarrow \vec{x}, \vec{y}$ kan være lin. uavh."

Strategi: Prøving og feiling

Her kan det være lurt å begynne med enkle matriser, så vi prøver med identitetsmatrisen, I_2:

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ egenvektorer m. $\lambda = 1$

I en eksamenssituasjon kan det være lurt å verifisere at $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ faktisk er egenvektorer med samme egenverdi (sjekk at $A\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x}$ og at $A\boldsymbol{y} = 1\boldsymbol{y}$).

(Sjekk: $A\vec{x} = 1\vec{x}$ og $A\vec{y} = \lambda\vec{y}$)

Vektorene x og y er lineært uavhengige (de kan jo ikke skrives som skalarmultipler av hverandre). Dermed er P3 sann:

$\vec{x}, \vec{y}$ lin.uavh. $\Rightarrow$ P3 SANN

Oppgave 4

La A være en $n \times n$-matrise. Vis at A og dens transponerte A^T har like egenverdier.

Vet: $A_{n \times n}$

Vil vise: A og A^T like egenverdier

Teorem 10.9

$A_{n \times n}$.

Egenverdiene til A er alle løsninger λ av

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Det følger altså av Teorem 10.9 at det er nok å vise at A og A^T har samme karakteristiske polynom:

Nok å vise: $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$

$$\det(A^T - \lambda I) \overset{\substack{I = I^T \\ \Rightarrow \lambda I = (\lambda I)^T}}{=} \det(A^T - (\lambda I)^T) \overset{A^T - B^T = (A-B)^T}{=} \det(\underbrace{(A - \lambda I)^T}) \overset{\det(B) = \det(B^T)}{=} \det(A - \lambda I)$$

Ettersom de karakteristiske polynomene er like, har de også samme løsninger. Dermed kan vi konkludere med at A og A^T har like egenverdier:

$\Rightarrow A$ og A^T har like egenverdier $\square$

Oppgave 7

Finn hver matrises determinant, egenverdier og tilhørende egenrom.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & \div & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = -1 \cdot (1 \cdot 0 - (-2) \cdot 1) = -2$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} + & \div & + \end{matrix} \end{array}$$

$$\det(A - \lambda I) = 1(0 \cdot 2 - (-1)(-2-\lambda)) - 0 + (-\lambda)(-\lambda(-2-\lambda) - 0 \cdot 1)$$

$$= (-2-\lambda) + \lambda^2(-2-\lambda) = \underbrace{(-2-\lambda)}\underbrace{(1+\lambda^2)} = 0$$

$-2-\lambda = 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda = -2}$

$1 + \lambda^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 = -1$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = i \\ \lambda_2 = -i \end{cases}$

Altså, en reell matrise kan ha komplekse egenverdier. Vi finner kun egenrommet som hører til egenverdien $\lambda_3 = i$. Resten klarer dere selv (:

$\lambda_3 = -i$

$$(A-(-i)I_3)\vec{x} = \vec{0} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} i & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2+i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + ix_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = s,\ s \in \mathbb{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} s$$

La $s = 1 \Rightarrow E_{-i} = \left\{\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Eksamen Kont 2018

Oppgave 6

a) La P være en kvadratisk matrise slik at $P^2 = P$. Vis at egenverdiene til P kun kan være 0 eller 1.

<u>Vet:</u> $P_{n\times n}$ $\qquad P^2 = P$

<u>Vil vise:</u> $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$

Bevis:

La $\vec{v}$ egenvektor for P m. egenverdi λ

$$P\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$P^2\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$P \cdot \underbrace{P\vec{v}}_{=\lambda\vec{v}} = \lambda\vec{v}$$

$$P\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\lambda \underbrace{P\vec{v}}_{=\lambda\vec{v}} = \lambda\vec{v}$$

$$\lambda^2\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\lambda^2\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$(\lambda^2 - \lambda)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \quad \vee \quad \lambda^2 - \lambda = 0$$

$\vec{v}$ egenvektor

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ UMULIG

$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\underline{\underline{\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = 1}} \qquad \square$$

b) Gi et eksempel på en 2×2-matrise P slik at $P^2 = P$ og som har egenverdier 0 **og** 1.

<u>Mål</u>: Finne $P_{2\times 2}$ s.a. $P^2 = P$ og $\lambda = 0 \wedge \lambda = 1$

<u>Strategi</u>: Prøve m. enkle 2×2-matriser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = (1-\lambda)(-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

c) Gi et eksempel på en 2×2-matrise P som har egenverdier 0 eller 1 eller begge, og som **ikke** tilfredsstiller $P^2 = P$.

Denne klarer dere selv. Strategien er samme som i forrige oppgave, vi prøver og feiler med enkle 2×2-matriser.

Eksamen vår 2018

Oppgave 6

a) Fullfør utsagnet til en definisjon: «Et tall λ er en **egenverdi** til en kvadratisk (square) matrise A dersom…»

Definisjon

En skalar λ er en **egenverdi** til $A_{n\times n}$ dersom det finnes en $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ s.a.

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

b) Finn en matrise A slik at

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A med egenverdi 2, og

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A med egenverdi 3.

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 2$

$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\lambda_3 = 3$

Mål: Finne $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ s.a.

1) $A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$

2) $A\vec{v}_3 = \lambda_3 \vec{v}_3$

1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} a+2b=2 \\ c+2d=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+3b=3 \\ c+3d=9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} a+2b \qquad\qquad = 2 \\ \qquad\quad c+2d = 4 \\ a+3b \qquad\qquad = 3 \\ \qquad\quad c+3d = 9 \end{array} \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

Gauss

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-6 \\ d=5 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave X

Anta at A er en $n \times n$-matrise, og at $\boldsymbol{y}$ og $\boldsymbol{z}$ er lineært uavhengige egenvektorer til A med korresponderende egenverdi 2. La $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{y} + 5\boldsymbol{z}$. Er $\boldsymbol{v}$ en egenvektor til A?

- ☐ Ja, $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor til A med egenverdi 2.
- ☐ Ja, $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor til A med egenverdi 5.
- ☐ Nei, $\boldsymbol{v}$ er ikke en egenvektor til A.

$A_{n\times n}$

$\vec{y}, \vec{z}$ lin. uavh. egenvektorer for A m. $\lambda = 2$

$\vec{v} = 5\vec{y} + 5z$

$E_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{u} = 2\vec{u}\}$

E_2 er det underrommet som består av alle egenvektorene som hører til egenverdien $\lambda = 2$. Ettersom dette selv er et vektorrom betyr det at det er lukket under addisjon:

E_2 vektorrom $\Rightarrow$ E_2 lukket under addisjon

Siden $\vec{y}, \vec{z} \in E_2 \Rightarrow \vec{v} = 5\vec{y} + 5\vec{z} \in E_2$

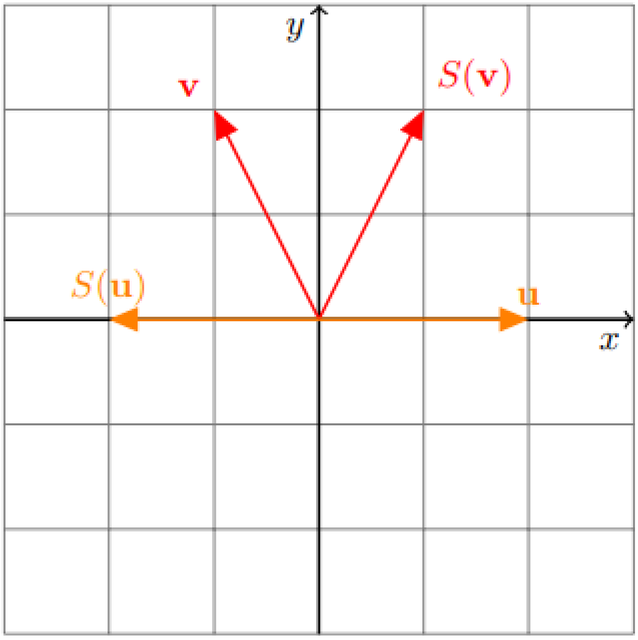
lin.komb. av $\vec{y}$ og $\vec{z}$

$\Rightarrow \vec{v}$ egenvektor for A m. egenverdi $\lambda = 2$

Eksamen vår 2022

Oppgave 7

La $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon som speiler vektorer i $\mathbb{R}^2$ om y-aksen:



Hva er egenverdiene til lineærtransformasjonen?

a) 0, -1 og 1
b) 0 og 1
c) -1 og 1
d) Kun 1

$S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Vi skal løse oppgaven ved å finne standardmatrisen for lineærtransformasjonen, og deretter regne ut matrisens egenverdier:

<u>Plan:</u> ① Finne std. matrisen A tilhørende S
② Løse $\det(A-\lambda I)=0$

S er en lineærtransformasjon, og effekten av denne på en gitt vektor kan oppnås ved å gange med dens standardmatrise, A:

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen er bestemt ut fra hva den gjør med standardbasisvektorene:

$$A = \left[S(\vec{e}_1) \mid S(\vec{e}_2) \right]$$

$$S(\vec{e}_1) = S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S(\vec{e}_2) = S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\left|\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right| = (-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1-\lambda)=0 \quad \vee \quad (1-\lambda)=0$$

$$\lambda = -1 \quad \vee \quad \lambda_2 = 1$$