Plenumsregning 8: Mer om projeksjon

Eksamen høst 2018

Oppgave 6

Finn en ortogonal basis for underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av disse vektorene

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$U = \mathrm{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ underrom av $\mathbb{R}^4$

Plan: (1) Finne basis β

(2) Ortogonaliser β

For å være en basis må vektorene være lineært uavhengige. Vi begynner med å sjekke om vektorene vi har fått oppgitt er lineært (u)avhengige. Vi gjør dette ved å sjekke om noen av vektorene er lineærkombinasjoner av hverandre:

Ser at $\vec{v}_4 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

Så vi dropper $\boldsymbol{v}_4$. De øvrige vektorene, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$, er lineært uavhengige. Dette kan (og bør!) sjekkes, f.eks. ved å regne ut determinanten til matrisen med disse kolonnevektorene.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ lin.uavh.

(def: $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$)

(1) $\Rightarrow \beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ basis for U

Nå skal vi ortogonalisere denne basisen vha. Gram-Schmidt-metoden:

② $\beta \to \beta'$ ortogonal

Gram-Schmidt-metoden:

Gitt en basis $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$, kan vi vha. følgende prosess finne en *ortogonal* basis $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - p_{\boldsymbol{u}_1}(\boldsymbol{v}_2)$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - p_{\boldsymbol{u}_1}(\boldsymbol{v}_3) - p_{\boldsymbol{u}_2}(\boldsymbol{v}_3)$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} p_{\boldsymbol{u}_j}(\boldsymbol{v}_k)$$

Visuell forståelse av Gram-Schmidt-metoden: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ee/Gram-Schmidt_orthonormalization_process.gif

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - p_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\left(\sqrt{2^2+1^2+1^2+0^2}\right)^2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v}_2$$

TIPS: Altså ser vi at $\boldsymbol{v}_1$ og $\boldsymbol{v}_2$ allerede var ortogonale. For å unngå dobbelt arbeid i fremtiden kan vi starte med å sjekke om noen av vektorene er ortogonale fra før (i så fall trenger vi jo ikke ortogonalisere dem).

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - p_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - p_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3) = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} \cdot \vec{u}_2 = \dots = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 2/6 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

TIPS 2: Utfør mellomregninger for f.eks. $\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1$ osv. for å redusere risiko for regnefeil.

$\Rightarrow \beta' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ortogonal basis for U

$P: \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \quad \forall\, i \neq j, \; i,j \in \{1,2,3\}$

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

Vi ser på indreproduktrommet av kontinuerlige funksjoner fra $[0,1]$ til $\mathbb{R}$, $C([0,1])$, med indreproduktet definert i Teorem 9.22. Regn ut indreproduktet, finn vinkelen og avgjør om de er ortogonale:

a) $-x$ og e^x

Teorem 9.22

Operasjonen

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

er et indreprodukt på $C([a,b])$.

$C([0,1])$ = Indreprod.rommet av kontinuerlige funksjoner fra $[0,1]$ til $\mathbb{R}$

a b

a) $f(x) = -x$

$g(x) = e^x$

① Finne $\langle f,g\rangle$

② Finne ∡ mellom f og e^x

③ f, e^x ortogonale?

① $\langle f,g\rangle = \frac{1}{1-0}\int_0^1 -x \cdot e^x \, dx$

$$= -\underbrace{\int_0^1 x \cdot e^x \, dx}$$

Husk: $\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v$

$u = x$ $v = e^x$

$u' = 1$ $v' = e^x$

$$\Rightarrow \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$
$$= xe^x - e^x$$
$$= \underline{e^x(x-1)} + C$$

$$\langle f, g \rangle = -\int_0^1 x \cdot e^x dx = -\left[e^x(x-1)\right]_0^1$$
$$= -\left[e^1\cancel{(1-1)} - e^0(0-1)\right]$$
$$= 1 \cdot (-1) = \underline{\underline{-1}}$$

② $\theta = ?$

$\boxed{\text{Husk: } \langle f, g \rangle = \|f\| \cdot \|g\| \cdot \cos\theta}$

$$\langle f, g \rangle = \|f\| \cdot \|g\| \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \cdot \|g\|}\right)$$

Mellomregning:

$$\langle f, g \rangle = -1$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\langle -x, -x \rangle} = \left(\frac{1}{1-0}\int_0^1 -x \cdot (-x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\int_0^1 x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{3}(1^3 - 0^3)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\|g\| = \sqrt{\langle g, g\rangle} = \sqrt{\langle e^x, e^x\rangle} = \left(\frac{1}{1-0}\int_0^1 e^x \cdot e^x \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big(\underbrace{\int_0^1 e^{2x} dx}\Big)^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

La $y = 2x \rightarrow y' = 2$

$$dy = y' dx \rightarrow dx = \frac{1}{y'} dy$$

Vi ser først på det ubestemte integralet:

$$\Rightarrow \int e^y dx = \int e^y \cdot \frac{1}{y'} dy = \int e^y \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}\int e^y dy = \underline{\frac{1}{2} e^y + C}$$

Vi setter nå inn i det bestemte integralet og substituerer for $y = 2x$:

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^0 = \underline{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}$$

Vi setter så inn i (*) igjen for å regne ut $\|g\|$:

$$(*) \quad \|g\| = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{e^2-1}}$$

Vi setter inn for $\langle f, g\rangle$, $\|f\|$ og $\|g\|$ i formelen for θ:

$$\theta = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{e^2-1}} \simeq \underline{\underline{165{,}7^\circ}}$$

Til slutt avgjør vi om funksjonene er ortogonale:

(3) Ortogonal $\Rightarrow \theta = 90^\circ$

Men $\theta = 165{,}7^\circ \Rightarrow f, g$ <u>IKKE</u> ortogonale

Eksamen høst 2019

Oppgave 5

La $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, dvs V er vektorrommet av alle polynomer av grad 2 eller mindre med reelle koeffisienter. La $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

a) Oppgi definisjonen av et reelt indreprodukt. Vis at funksjonen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ er et indreprodukt på V.

$$V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$$

Definisjon

Et **indreprodukt** på et reelt vektorrom V er en funksjon $\langle . , . \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ som oppfyller:

1) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle$ (*Symmetri*)
2) $\langle \boldsymbol{v}, a\boldsymbol{w} + b\boldsymbol{u}\rangle = a\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle + b\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle$ (*Linearitet*)
3) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geq 0$ og $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ kun dersom $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (*Positivitet*)

$$① \quad \langle p(x), q(x)\rangle \overset{?}{=} \langle q(x), p(x)\rangle$$

Indreproduktet er symmetrisk fordi rekkefølgen spiller ingen trille når vi multipliserer polynomer:

$$\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx = \int_0^1 q(x)\cdot p(x)dx \quad \text{fordi } p(x)\cdot q(x) = q(x)\cdot p(x) \quad \text{OK}$$

Deretter sjekker vi linearitet:

$$② \quad \underbrace{\langle p(x), aq(x)+br(x)\rangle} \overset{?}{=} a\langle p(x), q(x)\rangle + b\langle p(x), r(x)\rangle$$

$$= \int_0^1 p(x)\cdot(aq(x)+br(x))dx = \int_0^1 ap(x)\cdot q(x) + bp(x)r(x)dx$$

$$= a\int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx + b\int_0^1 p(x)\cdot r(x)\,dx$$

$$a\langle p(x), q(x)\rangle + b\langle p(x), r(x)\rangle$$

Ok!

Vi sjekker om indreproduktet av et polynom med seg selv er positivt:

3 i) $\langle p(x), p(x)\rangle \geq 0$?

$$= \int_0^1 p(x)\cdot p(x)\,dx = \int_0^1 (p(x))^2\,dx \geq 0$$ fordi $(p(x))^2 \geq 0$ på hele $[0,1]$ ok

Deretter sjekker vi om indreproduktet av et polynom med seg selv er 0 hvis og bare hvis polynomet selv er 0:

ii) $\langle p(x), p(x)\rangle = 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} p(x) = 0$

Ja, fordi $(p(x))^2 = 0 \Longleftrightarrow p(x) = 0$ Ok

$\xRightarrow{1-3}$ $\langle \cdot , \cdot \rangle$ er et INDREPRODUKT

Eksamen vår 2022

Oppgave 4

Bestem om funksjonene

$$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = x, \qquad f_3(x) = \sin(x),$$

er ortogonale i indreproduktrommet $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$, når indreproduktet er definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

Hvis ikke, finn en ortogonal basis for det lineære spennet $\mathrm{span}(f_1, f_2, f_3)$ ved å bruke Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetode.

$$f_1(x) = 1 \qquad f_2(x) = x \qquad f_3(x) = \sin(x)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$$

① f_1, f_2, f_3 ortogonale?

Vi vet at to polynomer er ortogonale hvis og bare hvis indreproduktet av dem er 0:

$$f, g \text{ ortogonale} \iff \langle f, g \rangle = 0$$

Vi sjekker:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^2 - \left(\frac{1}{2}(-\pi)^2\right) = 0$$

$\Rightarrow f_1, f_2$ ortogonale

$$\langle f_1, f_3 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(x)\, dx = \left[-\cos(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = -\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} \underbrace{-(-}_{+} \underbrace{\cos(-\pi)}_{-1})$$

$$= -(-1) + (-1) = \underline{0}$$

$\Rightarrow f_1, f_3$ ortogonale

$$\langle f_2, f_3 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(x)\,dx$$

$$\boxed{\text{Husk: } \int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v}$$

$u = x \qquad v = -\cos(x)$

$u' = 1 \qquad v' = \sin(x)$

Vi ser på det ubestemte integralet først:

$$\int x \cdot \sin(x)\,dx = x\left(-\cos(x)\right) - \int 1 \cdot \left(-\cos(x)\right)dx$$

$$= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

$$= -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

Deretter beregner vi indreproduktet med det bestemte integralet:

$$\langle f_2, f_3 \rangle = \left[-x\cos(x) + \sin(x)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\pi\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - \Big(\underbrace{-(-\pi)}_{-}\underbrace{\cos(-\pi)}_{=-1} + \underbrace{\sin(-\pi)}_{=0}\Big)$$

$$= -\pi \cdot (-1) - \pi \cdot (-1) = \underline{2\pi \neq 0}$$

$\Rightarrow f_2, f_3$ IKKE ortogonale

I neste del av oppgaven skal vi finne en ortogonal basis for spennet av f_1, f_2, f_3:

2 Finne $h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ ortogonal basis for $\text{span}\{f_1, f_2, f_3\}$

Vi utfører Gram-Schmidt:

2a $h_1(x) = f_1(x) = 1$

I forrige del av oppgaven så vi at f_1 og f_2 var ortogonale ettersom indreproduktet var 0. Altså trenger vi ikke ortogonalisere f_2:

$$h_2(x) = f_2 = x$$

$$h_3(x) = f_3 - \frac{\langle f_3, h_2 \rangle}{\langle h_2, h_2 \rangle} - \frac{\langle f_3, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1$$

Vi gjør mellomregninger:

$$\langle f_3, h_2 \rangle \overset{\text{Symmetri}}{=} \langle h_2, f_3 \rangle \overset{h_2 = f_2}{=} \langle f_2, f_3 \rangle = \underline{2\pi}$$

$$\langle h_2, h_2 \rangle = \langle x, x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{3}[x^3]_{-\pi}^{\pi} = \underline{\frac{2\pi^3}{3}}$$

$$\langle f_3, h_1 \rangle = \langle h_1, f_3 \rangle \underset{h_1 = f_1}{=} \langle f_1, f_3 \rangle = \underline{0}$$

Vi setter inn i uttrykket for h_3:

$$h_3 = \sin(x) - \frac{\cancel{2\pi}}{\frac{\cancel{2}\pi^{\cancel{3}\,2}}{3}} \cdot x - 0 = \sin(x) - \frac{3x}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow \left(1, x, \sin(x) - \frac{3x}{\pi^2}\right) \text{ ortogonal basis}$$

Eksamen høst 2023

Oppgave 5

- Avgjør om polynomene

$$p(t) = 2 - t, \quad q(t) = 1 + t^2 \quad \text{og} \quad r(t) = 1 + 2t - 3t^2$$

er lineært uavhengige eller ikke i $P_2(\mathbb{R})$, vektorrommet av reelle andregradspolynomer.

- Finn så ut om p og q står ortogonalt på hverandre med hensyn på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{2} f(k)g(k), \quad f, g \in P_2(\mathbb{R})$$

$p(t) = 2 - t$ $\quad q(t) = 1 + t^2$ $\quad r(t) = 1 + 2t - 3t^2$ $\quad V = P_2(\mathbb{R})$

① p, q, r lin. uavh.?

Vi uttrykker p, q, og r som vektorer ved hjelp av den ordnede basisen $\beta = (1, t, t^2)$ for $P_2(\mathbb{R})$ (koordinatvektorene kan utledes ved å uttrykke hver av polynomene som en lineærkombinasjon av basisvektorene).

$$\beta = (1, t, t^2) \quad [p]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [q]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [r]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Deretter konstruerer vi en matrise A med koordinatvektorene som kolonner:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad - \quad + \quad -$$

Fra teoremet med de mange ekvivalente påstandene vet vi at kolonnene til matrisen er lineært uavhengige hvis og bare hvis determinanten til matrisen er ulik 0:

kol. i A er lin. uavh. $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = -(-1)(1\cdot(-3) - 1\cdot 1) + 0 - 2(2\cdot 1 - 1\cdot 0) = -8 \neq 0$$

$\Rightarrow$ p, q, r lin. uavh.

Deretter må vi avgjøre om polynomene p og q er ortogonale med hensyn på indreproduktet:

② p, q ortogonale?

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{2} f(k)g(k) \qquad f, g \in P_2(\mathbb{R})$$

Vi regner ut indreproduktet:

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{2} (2-k)(1+k^2) = \sum_{k=0}^{2} (2+2k^2-k-k^3)$$

$$= \underbrace{(2+2\cdot 0^2-0-0^3)}_{2} + \underbrace{(2+2\cdot 1^2-1-1^3)}_{2} + \underbrace{(2+2\cdot 2^2-2-2^3)}_{0}$$

$$= 2 + 2 + 0 = \underline{4 \neq 0}$$

Ettersom indreeproduktet er 0 kan vi konkludere med at polynomene er ortogonale. Vi skriver svarsetning ettersom alle svar skal begrunnes!

$\Rightarrow$ p, q **IKKE** ortogonale fordi $\langle p, q \rangle \neq 0$

Eksamen kont 2021

Oppgave 8 (Ikke gjennomgått)

Vi ser på indreproduktet

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

på rommet $\mathcal{C}([0,2\pi])$ av kontinuerlige funksjoner fra $[0,2\pi]$ til $\mathbb{R}$.

a) Finn en ortonormal basis for $U = \text{Sp}\{\sin(x), \cos(x)\}$.

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

$\mathcal{C}([0,2\pi])$ $\qquad$ $[0,2\pi] \to \mathbb{R}$

a) $U = \text{Sp}\{\underbrace{\sin(x)}_{P_1}, \underbrace{\cos(x)}_{P_2}\}$

En ortonormal basis er bare en basis som består av ortogonale vektorer med lengde 1. Dette gjør vi ved å først finne en ortogonal basis, og deretter normalisere denne ved å dele basisvektorene på sine respektive lengder.

1 Ortogonal basis for U

Først skal vi være litt lure – for kan det tenkes at basisen vi har fått oppgitt faktisk er ortogonal allerede? Vi undersøker ved å regne ut indreproduktet:

$$\langle \overset{P_1}{\sin(x)}, \overset{P_2}{\cos(x)}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx \qquad (*)$$

Vi bruker kjerneregel:

La $u = \sin(x)$

$u' = \cos(x)$

$du = u'dx$

Vi ser på det ubestemte integralet først:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

$$= \int u \cdot \underbrace{u'\,dx}_{du} = \int u\,du = \underline{\frac{1}{2}u^2 + C}$$

Deretter setter vi inn i indreproduktet og regner ut det bestemte integralet:

$$\textcircled{*}\ \langle \sin(x), \cos(x) \rangle = \left[\frac{1}{2}(\sin(x))^2\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0})^2 - \frac{1}{2}(\underbrace{\sin(0)}_{=0})^2 = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \sin(x), \cos(x) \text{ ortogonal basis for } U$$

Ettersom $\sin(x)$ og $\cos(x)$ allerede er ortogonale trenger vi ikke bruke Gram-Schmidt. Nå må vi lage oss en orto<u>normal</u> basis. Dette gjør vi ved å finne lengden av funksjonene, og dele hver funksjon på sin respektive lengde:

② Ortonormal basis for U

$$\|\cos(x)\|^2 = \langle \cos(x), \cos(x) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2(x)}_{=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))}\,dx \quad \text{Trig. ID.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(2\pi + \frac{1}{2}\underbrace{\sin(4\pi)}_{=0} - \left(0 + \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2\cdot 0)}_{=0}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{4\pi}_{\,2}}\cdot\cancel{2\pi} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\|\sin(x)\|^2 = \langle \sin(x), \sin(x) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2(x)}_{\frac{1}{2}(1-\cos(2x))} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1-\cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(2\pi - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2\cdot 2\pi)}_{=0} - \left(0 - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2\cdot 0)}_{=0}\right)\right) = \underline{\frac{1}{2}}$$

For å normalisere må vi altså dele $\sin(x)$ og $\cos(x)$ på sine respektive lengder:

$$\frac{\cos(x)}{\|\cos(x)\|} = \frac{\cos(x)}{1/\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}\cos(x)}$$

$$\frac{\sin(x)}{\|\sin(x)\|} = \underline{\sqrt{2}\sin(x)}$$

$$\beta = \{\underbrace{\sqrt{2}\sin(x)}_{p_1'}, \underbrace{\sqrt{2}\cos(x)}_{p_2'}\} \text{ ortonormal basis for } U$$

b) Regn ut den ortogonale projeksjonen av $f(x) = x$ ned på U.

b) $f(x) = x$ $\qquad P_U(f(x)) = ?$

Vi husker at den ortogonale projeksjonen av en vektor (funksjon) ned på et underrom er summen av projeksjonen på hver av basisvektorene for underrommet:

$$P_U(f(x)) = P_{p_1}(f) + P_{p_2}(f) = \frac{\langle f, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} p_1 + \frac{\langle f, p_2\rangle}{\langle p_2, p_2\rangle} p_2$$

Her bør vi gjøre noen mellomregninger:

$$\langle f, p_1 \rangle = \langle x, \sin(x) \rangle = -1$$

$$\langle p_1, p_1 \rangle = \langle \sin(x), \sin(x) \rangle = 1/2$$

$$\langle f, p_2 \rangle = \langle x, \cos(x) \rangle = 0$$

$$\langle p_2, p_2 \rangle = \langle \cos(x), \cos(x) \rangle = 1/2$$

$$P_U(f(x)) = \frac{-1}{1/2} \sin(x) + \frac{0}{1/2} \cos(x) = \underline{-2\sin(x)}$$

c) Forklar hvorfor $\cos(x + {}^{\pi}/_{4})$ er i U, og finn koordinatvektoren til $\cos(x + {}^{\pi}/_{4})$ med hensyn på basisen du fant i a).

c) 1 Hvorfor $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \in U$?

Vi bruker addisjonsformelen og observerer at $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ kan skrives som en lineærkombinasjon av de *orto**gonale*** basisvektorene:

Addisjonsformel

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{\cos(x)}_{p_2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \underbrace{\sin(x)}_{p_1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$\Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ er en lin.komb. av p_1 og p_2

$$\Rightarrow \underline{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \in U}$$

Nå skal vi vise finne koordinatvektoren til $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ ved å skrive den som en lineærkombinasjon av de *orto**normale*** basisvektorene:

② $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = a\,p_1' + b\,p_2' \qquad a,b \in \mathbb{R}\ ,\ a,b = ?$

$$\cos(x)\cdot\cos(\pi/4) - \sin(x)\cdot\sin(\pi/4) = a\sqrt{2}\sin(x) + b\sqrt{2}\cos(x)$$

I) $\cos(x)\cdot\cos(\pi/4) = b\sqrt{2}\cos(x) \rightarrow b = \dfrac{\cos(\pi/4)}{\sqrt{2}} = 1/2$

II) $-\sin(x)\cdot\sin(\pi/4) = a\cdot\sqrt{2}\sin(x) \rightarrow a = \dfrac{-\sin(\pi/4)}{\sqrt{2}} = -1/2$

$$\Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}p_1' + \frac{1}{2}p_2'$$