Plenumsregning 6: Lineærtransformasjoner

Ekstraoppgaver

Oppgave 2

1. Finn ut om funksjonen T er en lineærtransformajson mellom reelle vektorrom.

Hvis den er det:

2. Finn standardmatrisen til T
3. Regn ut $\ker(T)$
4. Regn ut $\mathrm{im}(T)$
5. Finn ut om T er injektiv
6. Finn ut om T er surjektiv

a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tan(x) \\ e^y \end{bmatrix}$

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \tan(x) \\ e^y \end{bmatrix}$$

Definisjon

V, W vektorrom

$T: V \to W$ er en **lineærtransformasjon** hvis

I. $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \qquad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$

II. $T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u}) \qquad \forall\, \boldsymbol{u} \in V, \forall c$ skalar

For å finne ut om T er en lineærtransformasjon må vi sjekke betingelsene I og II. Vi sjekker først om T er lukket under addisjon:

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tan(u_1+v_1) \\ e^{u_2+v_2} \end{bmatrix}$$

$$? \; \parallel$$

$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tan(u_1) \\ e^{u_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tan(v_1) \\ e^{v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan(u_1)+\tan(v_1) \\ e^{u_2}+e^{v_2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(\vec{u}+\vec{v}) \neq T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$\Rightarrow T$ er __IKKE__ en lin. trans.

b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x + y$

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2x + y$$

① T lin.trans.?

I) $T(\vec{u}+\vec{v}) \overset{?}{=} T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix}\right) = 2(u_1+v_1) + u_2 + v_2$$

$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = 2u_1 + u_2 + 2v_1 + v_2 = 2(u_1+v_1) + u_2 + v_2$$

$\underline{\text{OK}}$

II) $T(c\vec{u}) \overset{?}{=} cT(\vec{u})$

$$T(c\vec{u}) = T\left(c\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}\right) = 2cu_1 + cu_2$$

$$cT(\vec{u}) = cT\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = c\cdot(2u_1 + u_2) = 2cu_1 + cu_2$$

$\underline{\text{OK}}$

I) + II)
$\Longrightarrow$ T lin.trans.

② Standardmatrisen A til T

Definisjon

Standardmatrisen A til en lineærtransformasjon T er

$$A = [T(\boldsymbol{e}_1) \quad T(\boldsymbol{e}_2) \quad \dots \quad T(\boldsymbol{e}_n)]$$

Altså, kolonnene i standardmatrisen uttrykker hva transformasjonen gjør med standardbasisvektorene.

$$A = [T(\vec{e}_1) \mid T(\vec{e}_2)]$$

I $\mathbb{R}^2$: $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = 2\cdot 1 + 0 = \underline{2}$$

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = 2\,0 + 1 = \underline{1}$$

$$\Rightarrow A = \underline{\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}}$$

③ $\ker(T) = ?$

Definisjon

> $T: V \to W$
>
> **Kjernen** til T ($\ker(T)$) er mengden av vektorer $\boldsymbol{v}$ som sendes til $\boldsymbol{0}$ av T:
>
> $$\ker(T) = \{\, \boldsymbol{v} \in V \,|\, T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$$

Vi vet at effekten av transformasjonen på en gitt vektor kan $\boldsymbol{v}$ er det samme som å gange med standardmatrisen til transformasjonen. Dermed har vi at vektorene som utgjør kjernen til transformasjonen er alle løsninger av det homogene likningssystemet. Vi må altså finne disse løsningene:

③ $\ker(T) = ?$

$$\ker(T) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{T(\vec{v}) = \vec{0}}\}$$

$$T(\vec{x}) = A x \implies A\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \iff 2v_1 + v_2 = 0$$

fri variabel
$v_2 = a \in \mathbb{R}$

$$v_1 = \frac{-v_2}{2}$$

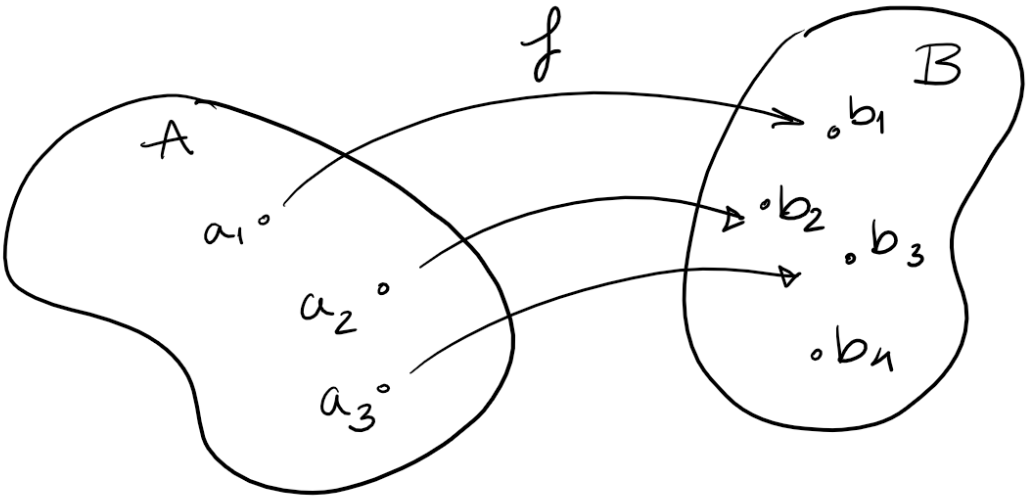
$$v_1 = -\frac{a}{2}$$

$\Rightarrow$ $a = -2$ $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \underline{\ker(T) = \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right\}}$$

Definisjon

> For en funksjon $f: A \to B$, har vi at f er ***injektiv*** (eller ***en-til-en***) hvis det $\forall b \in B$ er <u>maksimalt én</u> $a \in A$ s.a. $f(a) = b$.



- En funksjon er altså ***injektiv*** dersom det for alle elementer i B finnes **maksimalt ett tilhørende element i A.** Legg merke til at det *kan* finnes elementer i B som IKKE treffes av funksjonen.
- Vi sier at funksjonen er ***injektiv*** dersom forskjellige elementer i A gir forskjellige elementer i B. Med symboler:

$$f \text{ injektiv} \iff x \neq y \text{ gir } f(x) \neq f(y)$$

Hvis vi derimot kan finne forskjellige verdier i A som svarer til <u>SAMME</u> element i B, så kan vi vise at funksjonen IKKE er ***injektiv.*** Det er nettopp dette vi skal gjøre – vi skal finne to ulike vektorer $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ som gir samme resultat når vi anvender T:

Strategi: Vi viser T <u>IKKE</u> injektiv ved å finne $\vec{u} \neq \vec{v}$ s.a. $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$

Husk, det er nok å finne ett moteksempel for å vise at noe IKKE stemmer.

La $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$T(\vec{u}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 0 + 0 = 0 \qquad T(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 1 + (-2) = 0$$

$\Rightarrow T(\vec{u}) = T(\vec{v})$ selv om $\vec{u} \neq \vec{v}$

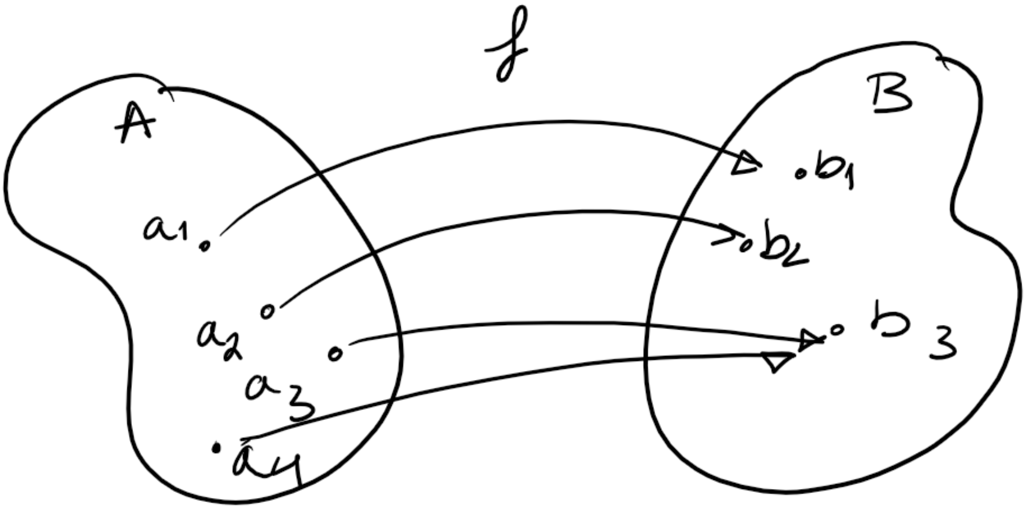
$\Rightarrow T$ IKKE injektiv

5 T surjektiv?

At en funksjon er ***surjektiv***, betyr at alle elementer i kodomenet (B) treffes av funksjonen:

Definisjon

For en funksjon $f: A \to B$, har vi at f er **surjektiv** (eller **på**) hvis det $\forall b \in B$ finnes en $a \in A$ s.a. $f(a) = b$.



- Legg merke til at et element i B kan ha *flere* tilhørende elementer i A. M.a.o. selv om en funksjon er ***surjektiv***, så betyr ikke det nødvendigvis at den er ***injektiv***.
- Vi skal også finne bildet til funksjonen, så vi gjør det først og deretter bruker vi sammenhengen mellom bildet og begrepet ***surjektiv***.

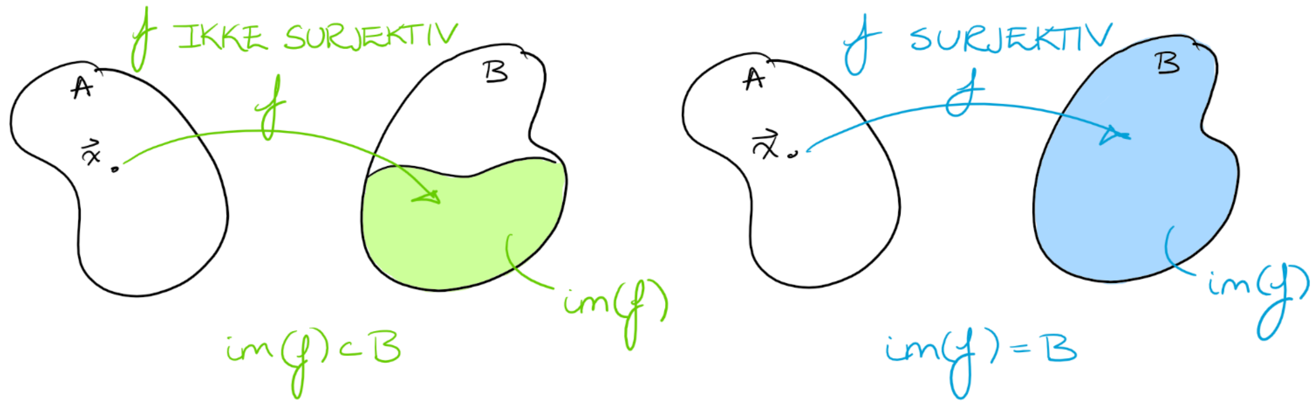
Definisjon

Anta at vi har en funksjon $f: A \to B$.

Bildet til f ($\text{im}(f)$) er mengden av alle elementer i kodomenet som treffes av funksjonen:

$$\text{im}(f) = \{f(a) | a \in A\}$$

Sagt på en uformell måte: ***Bildet*** utgjør alt som treffes av funksjonen.



Så bildet kan treffe deler av B eller hele B, avhengig av om funksjonen er ***surjektiv*** eller ei.

$$\text{Her: } T : \overset{A}{\mathbb{R}^2} \to \overset{B}{\mathbb{R}}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x + y$$

Vi vet at T er ***surjektiv*** hvis og bare hvis ***bildet*** er lik kodomenet $\mathbb{R}$:

$$T \text{ surjektiv} \iff \operatorname{im}(T) = \mathbb{R}$$

Hvis vi velger et hvilket som helst element i kodomenet $\mathbb{R}$, kan vi finne en tilhørende vektor $\boldsymbol{v}$ i domenet? Med symboler:

For $a \in \mathbb{R}$, kan vi finne $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ s.a. $T(\vec{v}) = a$?

I så fall er ***bildet*** til T lik $\mathbb{R}$, og T er ***surjektiv***. Ved prøving og feiling velger vi vektoren $\boldsymbol{v}$ på en lur måte:

Strategi: Prøving og feiling

La $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$ $\quad T(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 0 + a = a$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \; \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ s.a. $T(\vec{v}) = a$

Dermed treffes hele kodomenet av funksjonen og T er surjektiv:

5 + 6 Siden $\text{im}(T) = \mathbb{R}$ er T surjektiv

7 T bijektiv?

Definisjon

For en funksjon $f: A \to B$, har vi at f er ***bijektiv*** dersom f er både *injektiv* og *surjektiv*.

Ettersom T IKKE er injektiv er T heller ikke bijektiv

Oppgave 4

La

$$\beta = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

og

$$\mathcal{C} = \left(\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

være basiser for $\mathbb{R}^2$.

- Finn vektoren $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ uttrykt i β-basisen.
- Finn matrisene A og B slik at $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = A[\boldsymbol{x}]_\beta$ og $[\boldsymbol{x}]_\beta = B[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}}$ for alle $\boldsymbol{x}$ i $\mathbb{R}^2$.

$\beta = \left(\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ $\quad \mathcal{C} = \left(\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad [\vec{y}]_\beta = \,?$

Generelt: $\vec{x} = b_1\vec{b}_1 + b_2\vec{b}_2 = c_1\vec{c}_1 + c_2\vec{c}_2$

$$[\vec{x}]_\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Vi kan sette inn for vektorene $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{b}_1$ og $\boldsymbol{b}_2$ og løse likningssystemene for å finne $\boldsymbol{y}$ uttrykt i i β-basisen:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = b_1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow [\vec{y}]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I neste del av oppgaven skal vi finne matrisene som lar oss bytte mellom de ulike basisene:

MÅL:
1. Finne A s.a. $[\vec{x}]_e = A[\vec{x}]_\beta$
2. Finne B s.a. $[\vec{x}]_\beta = B[\vec{x}]_e$

$\Big\}\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

Vi har et teorem som sier at hvis vi har to basiser for et vektorrom, så kan vi finne en matrise som lar oss bytte basis. Altså hvis vi har en vektor $\boldsymbol{x}$ uttrykt med én basis, så kan vi finne en matrise som lar oss uttrykke vektoren med en annen basisen istedenfor:

Teorem 8.16

V n-dimensjonalt vektorrom

$$\beta = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n)$$

$$\gamma = (\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n)$$

Da finnes $A_{n\times n}$ s.a.

$$[\vec{x}]_\gamma = A[\vec{x}]_\beta, \qquad \forall \vec{x} \in V$$

hvor kolonnene i A er γ-koordinatvektorene i β:

$$A = \left([\vec{\beta}_1]_\gamma \quad [\vec{\beta}_2]_\gamma \quad \cdots \quad [\vec{\beta}_n]_\gamma\right)$$

Vi må bruke teoremet til å finne kolonnene i A, altså $\mathcal{C}$-koordinatene, slik at vi kan bytte fra β-basisen til $\mathcal{C}$-basisen.

$$1 \quad \xrightarrow{\text{Thm } 8.16} \quad A = \left[\, [\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} \;\; [\vec{b}_2]_{\mathcal{C}} \,\right] \qquad A: \beta \to \mathcal{C}$$

Kolonnene i A gir opphav til følgende likningssystemer, og vi ønsker å finne koordinatene c_1, c_2, c_3, c_4:

$$\text{I)} \quad \vec{b}_1 = c_1 \vec{c}_1 + c_2 \vec{c}_2 \quad \Rightarrow \quad [\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \vec{b}_2 = c_3 \vec{c}_1 + c_4 \vec{c}_2 \quad \Rightarrow \quad [\vec{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Vi løser likningssystemene:

$$\text{I)} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 13/24 \\ 0 & 1 & 7/24 \end{array}\right] \Rightarrow [\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 13/24 \\ 7/24 \end{bmatrix}$$

$$\text{II)} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/24 \\ 0 & 1 & 13/24 \end{array}\right] \Rightarrow [\vec{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 7/24 \\ 13/24 \end{bmatrix}$$

Deretter setter vi inn i matrisen A:

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}}}$$

I neste del av oppgaven skal vi finne matrisen B som lar oss gå motsatt vei, altså bytte fra $\mathcal{C}$-basisen til β-basisen:

$$2 \quad \text{Finne } B \text{ s.a. } [\vec{x}]_\beta = B[\vec{x}]_{\mathcal{C}}, \quad B: \mathcal{C} \to \beta$$

Vi skal se på to ulike metoder. Vi kan bruke en identisk fremgangsmåten som tidligere ved å sette opp matrisen og løse likningssystemene for å finne kolonnevektorene:

$$\xrightarrow{\text{Thm } 8.16} \quad B = \left[\, [\vec{c}_1]_\beta \;\; [\vec{c}_2]_\beta \,\right]$$

$$\text{I)} \quad \vec{c}_1 = b_1 \vec{b}_1 + b_2 \vec{b}_2 \quad \Rightarrow \quad [\vec{c}_1]_\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \vec{c}_2 = b_3 \vec{b}_1 + b_4 \vec{b}_2 \quad \Rightarrow \quad [\vec{c}_2]_\beta = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

I) $\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = b_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \iff \left[\begin{array}{cc|c}2&3&1\\3&2&5\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&0&13/5\\0&1&-7/5\end{array}\right]\begin{array}{c}b_1\\b_2\end{array} \Rightarrow [\vec{c}_1]_\beta = \begin{bmatrix}13/5\\-7/5\end{bmatrix}$

II) $\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} = b_3\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + b_4\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \iff \left[\begin{array}{cc|c}2&3&5\\3&2&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&0&-7/5\\0&1&13/5\end{array}\right]\begin{array}{c}b_3\\b_4\end{array} \Rightarrow [\vec{c}_2]_\beta = \begin{bmatrix}-7/5\\13/5\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}13 & -7\\ -7 & 5\end{bmatrix}$$

Alternativt kan vi løse følgende matriselikning:

ALTERNATIV

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}b_1&b_3\\b_2&b_4\end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&5\\5&1\end{bmatrix}}_{N}$$

$$M \cdot B = N$$

$$B = M^{-1}N$$

$$B = \begin{bmatrix}-2/5 & 3/5\\ 3/5 & -2/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5\\5&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13/5 & -7/5\\ -7/5 & 13/5\end{bmatrix}$$

Oppgave 5

b) Finn en basis γ for $\mathcal{P}_2$ slik at

$$[p]_\gamma = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

Er koordinatene til et andregradspolynom p.

$P_2 = \{ p(x) = a + bx + cx^2 \mid a, b, c \text{ skalarer} \}$

$\underline{\text{MÅL}}$: Finne en basis $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ for P_2 s.a.

$$[p]_\gamma = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

La $p(x) = a + bx + cx^2$, $p \in P_2$

$$\left.\begin{aligned} p(0) &= a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 = a \\ p(1) &= a + b \cdot 1 + c \cdot 1^2 = a + b + c \\ p(2) &= a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2 = a + 2b + 4c \end{aligned}\right\} \Rightarrow [p]_\gamma = \begin{bmatrix} a \\ a+b+c \\ a+2b+4c \end{bmatrix}$$

Vi må nå finne 3 polynomer, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ s.a. et generelt polynom p kan skrives som en lineærkombinasjon av disse:

$$p(x) = p(0)\gamma_1 + p(1)\gamma_2 + p(2)\gamma_3$$

$$\begin{aligned} \underline{a} + \underline{bx} + \underline{cx^2} &= a\gamma_1 + (a+b+c)\gamma_2 + (a+2b+4c)\gamma_3 \\ &= \underline{a\gamma_1} + \underline{a\gamma_2} + \underline{b\gamma_2} + \underline{c\gamma_2} + \underline{a\gamma_3} + \underline{2b\gamma_3} + 4c\gamma_3 \\ &= a(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + b(\gamma_2 + 2\gamma_3) + c(\gamma_2 + 4\gamma_3) \end{aligned}$$

Dette gir oss et likningssystem med 3 likninger og 3 ukjente:

$$\text{I)}\ \cancel{\alpha} = \cancel{\alpha}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \Rightarrow \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 1$$

$$\text{II)}\ \cancel{b}x = \cancel{b}(\gamma_2+2\gamma_3) \Rightarrow \gamma_2+2\gamma_3 = x$$

$$\text{III)}\ \cancel{c}x^2 = \cancel{c}(\gamma_2+4\gamma_3) \Rightarrow \gamma_2+4\gamma_3 = x^2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 4 & x^2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(x-2)(x-1) \\ 0 & 1 & 0 & x(2-x) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x}{2}(x-1) \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{2}(x-2)(x-1) \\ \gamma_2 = x(2-x) \\ \gamma_3 = \frac{x}{2}(x-1) \end{cases}$$

c) La p være gitt ved $p(x) = x^2$. Finn koordinatene til p med hensyn på γ.

$$q(x) = x^2$$

$$[q]_\gamma = ?$$

ALTERNATIV 1

$$q(x) = d\gamma_1 + e\gamma_2 + f\gamma_3 \rightarrow [q]_\gamma = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$$x^2 = d\,\frac{1}{2}(x-2)(x-1) + e\,x(2-x) + f\,\frac{x}{2}(x-1)$$

$$\vdots$$

$$0 + 0x + x^2 = x^2\left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right) + x\left(\frac{-3a}{2} + 2b - \frac{c}{2}\right) + a$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1/2 & -1 & 1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow [q]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ALTERNATIV 2

$$[q]_\gamma = \begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \\ q(2) \end{bmatrix}$$

$$[x^2]_\gamma = \begin{bmatrix} 0^2 \\ 1^2 \\ 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Eksamen kont 2019

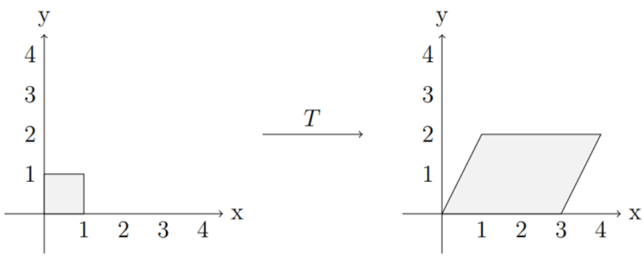
Oppgave 3

En lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder firkanten med hjørner i

$$(0,0), (1,0), (0,1) \text{ og } (1,1)$$

til parallellogrammet utspent av

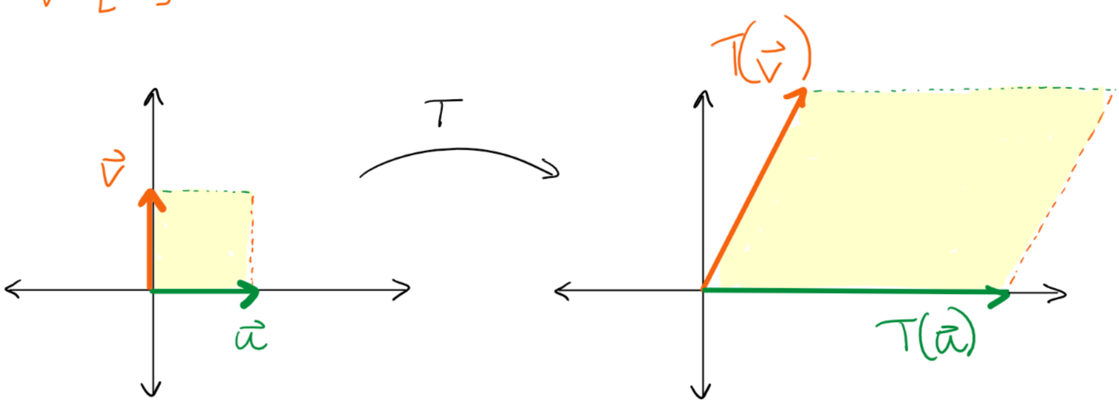
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Finn standardmatrisen A til T og regn ut $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Finn $\ker(T)$. Er T surjektiv?

$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad T(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



Husk: En lineærtransformasjon kan beskrives ut fra hva den gjør med basisvektorene:

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{Std. basis for } \mathbb{R}^2$$
$$\quad\;\; \vec{b}_1 \quad\; \vec{b}_2$$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Mål:
1. Finne matrisen A for T
2. Finne $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$
3. Finne $\ker(T)$
4. T surjektiv

① $A = \left[T(\vec{b}_1) \;\; T(\vec{b}_2) \right]$

$$A = \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \;\; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

② $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}}}$

③ $\ker(T) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \}$

$$T(\vec{x}) = \vec{0} \Updownarrow A\vec{x} = \vec{0}$$

Vi må altså løse det homogene likningssystemet for å finne vektorene som utgjør kjernen til transformasjonen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\ker(T) = \{\vec{0}\}}}$$

4) Det er kjent at T surjektiv $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \left| \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ T surjektiv