Plenumsregning 5: Vektorrom

Ekstraoppgaver

Oppgave 1

Svar med begrunnelse på følgende spørsmål:

a) Er mengden av alle løsninger (x, y, z) i $\mathbb{C}^3$av likningen
$$x - y + z = 0$$
et underrom av $\mathbb{C}^3$?

Altså, i denne oppgaven skal vi sjekke om mengden av alle komplekse, 3-dimensjonale vektorer hvor $x - y + z = 0$ danner et underrom av $\mathbb{C}^3$. Vi begynner med å skrive opp mengden, og vi kan kalle den S:

La $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y + z = 0\}$

S er altså mengden av vektorer (x, y, z) hvor $x - y + z = 0$. Først må vi ha klart for oss hva vektorrom og underrom er:

Definisjon

V mengde

2 operasjoner:

- Addisjon av vektorer: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$
- Skalarmultiplikasjon: $c\boldsymbol{u}$

For at V skal være et ***vektorrom***, må V være:

- Lukket under addisjon
- Lukket under skalarmultiplikasjon

I tillegg må vektoraksiomene (V1-V8) være oppfylt

Definisjon

Et ***underrom*** av et vektorrom V er en *delmengde* $U \subseteq V$ som i seg selv utgjør et *vektorrom*, med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte som i V

Det finnes et teorem som effektivt lar oss undersøke om en mengde er et underrom av et gitt vektorrom:

Teorem 7.9

For $U \subseteq V$, U er et *underrom* av V dersom

1) Nullvektoren i V ligger i U
2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \in U \quad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ (lukket under addisjon)
3) $c\boldsymbol{u} \in U \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in U, \quad c$ skalar (lukket under skalarmultiplikasjon)

Vi sjekker nå betingelsene 1-3 for mengden S:

1 $\vec{0} \in S$?

$$\vec{0} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

Nok å vise: $x - y + z = 0$ for $x = y = z = 0$

$$0 - 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{0} \in S \qquad \underline{\text{OK}}$$

2 Er $(\vec{u} + \vec{v}) \in S \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in S$?

La $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in S \Rightarrow u_1 - u_2 + u_3 = 0$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in S \Rightarrow v_1 - v_2 + v_3 = 0$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

For å finne ut om $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ også er i S må vi sjekke om denne vektoren oppfyller betingelsene for å være i S Så, for disse verdiene av x, y, z, er $x - y + z = 0$?

$$(u_1+v_1) - (u_2+v_2) + (u_3+v_3) \stackrel{?}{=} 0$$

Vi sjekker med å løse opp parentesene og flytte litt rundt på leddene:

$$= \underbrace{u_1 - u_2 + u_3}_{\substack{=0 \\ \text{fordi } \vec{u} \in S}} + \underbrace{v_1 - v_2 + v_3}_{\substack{=0 \\ \text{fordi } \vec{v} \in S}} = 0 \qquad \text{ok!}$$

$$\Rightarrow \underline{(\vec{u}+\vec{v}) \in S}$$

Dermed er S lukket under addisjon.

Nå, er S lukket under skalarmultiplikasjon?

3 Er $c\vec{u} \in S \ \forall \ \vec{u} \in S, c \in \mathbb{C}$?

Vi lar $\boldsymbol{u}$ være en vektor i S. Da vet vi at $u_1 - u_2 + u_3 = 0$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in S \Rightarrow u_1 - u_2 + u_3 = 0$$

$c \in \mathbb{C}$

$c\boldsymbol{u}$ blir da:

$$c\vec{u} = c\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

Vi sjekker om $c\boldsymbol{u}$ er med i S:

$$x - y + z \stackrel{?}{=} 0$$

$$= cu_1 - cu_2 + cu_3$$

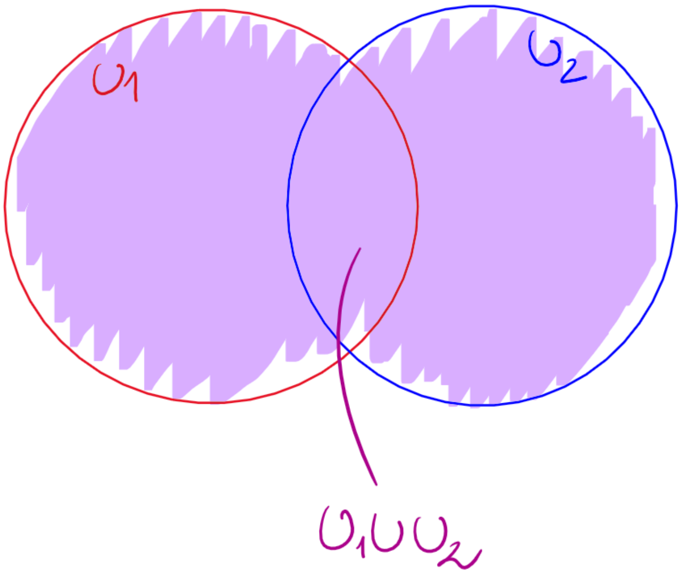
$$= c\underbrace{(u_1 - u_2 + u_3)}_{=0 \text{ fordi } \vec{u} \in S} = 0 \qquad \underline{\text{ok!}}$$

Svar: S er et underrom av $\mathbb{C}^3$ fordi 1 - 3 holder

Oppgave 2

La V være et vektorrom, og la U_1 og U_2 være to underrom av V. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

b) Unionen $U_1 \cup U_2$ er et underrom av V.



$$U_1 \cup U_2 = \{ \vec{u} \in V \mid \vec{u} \in U_1 \text{ og/eller } \vec{u} \in U_2 \}$$

$U_1 \cup U_2$ underrom av V?

NEI! Vi viser v. MOTEKSEMPEL

La $U_1 = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 = 0 \right\}$

↳ x-aksen

$U_2 = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = 0 \right\}$

↳ y-aksen

Igjen bruker vi Teorem 7.9 og sjekker betingelsene:

1 Er $0 \in U_1 \cup U_2$?

↳ Ja, fordi $\vec{0} \in U_1$ (og forsåvidt $\vec{0} \in U_2$)

2 Er $(\vec{u}+\vec{v}) \in U_1 \cup U_2$?

NEI

Ex: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_2$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2 \quad \times$$

Altså, unionen er IKKE lukket under addisjon. Ettersom ikke alle betingelsene holder samtidig kan vi konkludere med at unionen IKKE er et underrom av V.

Svar: $U_1 \cup U_2$ er IKKE et underrom av V

Oppgave 7

La V være et vektorrom. Vis at følgende påstander følger fra vektoraksiomene.

Vi husker fra definisjonen at for at V skal være et vektorrom må det være en mengde som er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon. I tillegg måtte vektoraksiomene (V1-V8) være oppfylt:

aksiomer for addisjon

(V1) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.
(Vektoraddisjon er en *assosiativ* operasjon.)

(V2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
(Vektoraddisjon er en *kommutativ* operasjon.)

(V3) Det finnes en vektor $\mathbf{0}$ slik at $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.
(Vektoraddisjon har et *identitetselement*.)

(V4) For hver vektor $\mathbf{u}$ finnes en vektor $-\mathbf{u}$ slik at $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$.
(Vektoraddisjon har *inverser* for alle elementer.)

aksiomer for skalar-multiplikasjon

(V5) $(ab)\cdot\mathbf{u}=a\cdot(b\cdot\mathbf{u})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og alle skalarer a og b.
(Skalarmultiplikasjon er *kompatibel* med multiplikasjon av skalarer.)

(V6) $1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.
(Tallet 1 er *identitetselement* for skalarmultiplikasjon.)

(V7) $a\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og alle skalarer a.
(Skalarmultiplikasjon er *distributiv* over addisjon av vektorer.)

(V8) $(a+b)\cdot\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, og alle skalarer a og b.
(Skalarmultiplikasjon er *distributiv* over addisjon av skalarer.)

b) Hvis $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ for tre vektorer $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, og $\boldsymbol{w}$ i V, så følger det at $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$.

I denne oppgaven har vi et vektorrom V, og en påstand. Vi skal vise at påstanden følger fra vektoraksiomene. Det innebærer at vi later som om vi ikke kan ting vi har kunnet i årevis.

<u>Vet:</u> V vektorrom

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

$\vec{u}+\vec{v} = \vec{u}+\vec{w}$

<u>Vil vise:</u> $\vec{v} = \vec{w}$

Bevis:

Se på $\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$

Vi bruker $V2$ på begge sider - addisjon er *kommutativt*. Dvs $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$.

$$\vec{v}+\vec{u}=\vec{w}+\vec{u} \qquad V2$$

Fra $V4$ vet vi at $\boldsymbol{u}$ har en additiv invers $-\boldsymbol{u}$. Vi legger til $-\boldsymbol{u}$ på begge sider av likheten:

$$(\vec{v}+\vec{u})+(-\vec{u})=(\vec{w}+\vec{u})+(-\vec{u}) \qquad V4$$

Så bruker vi $V1$ på begge sider. Altså at vektoraddisjon er assosiativt - vi kan sette parenteser der vi vil.

$$\vec{v}+(\vec{u}+(-\vec{u}))=\vec{w}+(\vec{u}+(-\vec{u})) \qquad V1$$

Nå bruker vi $V4$ igjen. At $\boldsymbol{u}$ + inversen $-\boldsymbol{u}$ er $\boldsymbol{0}$:

$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{w}+\vec{0} \qquad V4$$

Til slutt bruker vi $V3$, at det finnes et nullelement, så $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}$ er $\boldsymbol{v}$.

$$\vec{v}=\vec{w} \qquad V3 \qquad \square$$

Oppgave 10

a) Finn en basis for $\mathcal{P}_2$. Vis at det faktisk er en basis.

P_2 = {alle polynomer av grad 2 eller lavere}

Vi foreslår en basis, og så sjekker vi at forslaget vårt faktisk oppfyller kravene for å være en basis. Vi kan f.eks. velge $\{1, x, x^2\}$.

Er $\{1, x, x^2\}$ en basis for P_2?

Definisjon

En **basis** for et vektorrom V er en mengde

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n\}$$

vektorer i V som oppfyller følgende betingelser:

1) Vektorene spenner ut V, dvs. Span$\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n\} = V$.
2) Vekorene er lineært uavhengige, dvs. $c_1\boldsymbol{\beta}_1 + c_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ for c_i skalarer.

① $\text{span}\{1, x, x^2\} \stackrel{?}{=} P_2$

$\text{span}\{1, x, x^2\} = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 \quad \forall\ a, b, c$ skalarer

$= P_2$ OK

② $1, x, x^2$ lin. uavh.?

Ja, fordi $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$

① + ②

$\Longrightarrow \{1, x, x^2\}$ er en basis for P_2

b) Hva er koordinatene til polynomet $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for $\mathcal{P}_2$?
Nå er vi ute etter de koeffisientene som lar oss uttrykke polynomet som en lineærkombinasjon av basisvektorene. I dette tilfellet kan vi se løsningen direkte:

$$a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 1 + 2x + 3x^2$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Eksamen Kont 2019

Oppgave 2

La A være en reell $m \times n$-matrise.

a) Skriv ned definisjonen på nullrommet til A. Vis at nullrommet er et underrom av $\mathbb{R}^n$. Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Definisjon

Nullrommet til en reell $m \times n$-matrise A er løsningsmengden til likningen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, altså delmengden:

$$\text{Null}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

av $\mathbb{R}^n$.

Nullrommet til matrisen er altså følgende mengde:

$$\text{Null}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

Altså nullrommet til A er den mengden som består av alle vektorer som er løsningen av det homogene likningssystemet. Dvs- alle vektorer $\boldsymbol{x}$ som oppfyller $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Deretter skal vi vise at nullrommet til A er et underrom av $\mathbb{R}^n$ vha. Teorem 7.9:

1) Er $\vec{0} \in \text{Null}(A)$?

$\hookrightarrow$ M.a.o., er $A\vec{x} = \vec{0}$ for $\vec{x} = \vec{0}$?

Ja, dette er den trivielle løsningen

Sjekk: $A\vec{0} = \vec{0}$ OK

Videre sjekker vi om nullrommet er lukket under addisjon:

2) Er $(\vec{u} + \vec{v}) \in \text{Null}(A)$ $\forall$ $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Null}(A)$

$\hookrightarrow$ Er $A(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$?

$$A(\vec{u}+\vec{v}) \overset{\text{Distributiv}}{=} \underbrace{A\vec{u}}_{=\vec{0}} + \underbrace{A\vec{v}}_{=\vec{0}} \quad \text{fordi } \vec{u},\vec{v} \in \text{Null}$$

$$\Rightarrow \underline{A(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{0}} \quad \underline{\text{OK}}$$

Og til slutt, er nullrommet lukket under skalarmultiplikasjon?

③ Er $(c\vec{u}) \in \text{Null}(A)$ $\forall \vec{u} \in \text{Null}(A)$, c skalar?

$\hookrightarrow A(c\vec{u}) = \vec{0}$?

$$A(c\vec{u}) = c\underbrace{A\vec{u}}_{=\vec{0} \text{ fordi } \vec{u}\in \text{Null}(A)} = c\vec{0} = \underline{\vec{0}}$$

$$\Rightarrow \underline{A(c\vec{u}) = \vec{0}} \quad \underline{\text{OK}}$$

Svar: ①-③ gir at Null(A) <u>ER</u> et underrom av $\mathbb{R}^n$

b) Ligger

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I nullrommet til A?

Finn en basis for $\text{Col}(A)$ og en basis for $\text{Null}(A)$. Bestem dimensjonen på disse underrommene.

La $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Her er det mange ting vi skal gjøre, så vi lager en oversikt for å minimere sjansen for at vi glemmer noe:

1. $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Null}(A)$?
2. Basis for $\text{Col}(A)$
3. Basis for $\text{Null}(A)$
4. $\dim(\text{Col}(A))$
5. $\dim(\text{Null}(A))$

Først, er $\boldsymbol{u}$ med i Null(A)?

1. $\vec{u} \in \text{Null}(A)$?

$\hookrightarrow A\vec{u} \stackrel{?}{=} \vec{0}$

Vi sjekker:

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{u} \notin \text{Null}(A)}$$

Altså, $\boldsymbol{u}$ er IKKE med i Null(A).
Er $\boldsymbol{v}$ med i Null(A), da?

$$\vec{v} \in \text{Null}(A) \Leftrightarrow A\vec{v} = \vec{0}$$

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{v} \in \text{Null}(A)}$$

② $\mathrm{Col}(A) = ?$

Før vi finner en basis for kolonnerommet (og nullrommet) minner vi oss selv på hva kolonnerommet er:

Definisjon

Kolonnerommet til en reell $m \times n$-matrise

$$A = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n]$$

er underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene i A:

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$$

Vi har en oppskrift for hvordan vi kan finne kolonnerommet, $\mathrm{Col}(A)$:

OPPSKRIFT

i. Gauss-eliminer A.
ii. Finn pivotelementer.
iii. Kolonnene i $\underline{A}$ som har ledende enere i den reduserte formen danner en basis for $\mathrm{Col}(A)$.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}}$$

Siden det er 2 elementer i basisen for kolonnerommet til A, så har dette underrommet dimensjon 2:

④ $\dim(\mathrm{Col}(A)) = \underline{2}$

Deretter finner vi dimensjonen til nullrommet vha. et resultat fra forelesningsnotatene:

Teorem 7.27

La A være en $m \times n$-matrise. Da er

$$\dim(\mathrm{Null}(A)) + \mathrm{rank}(A) = n$$

5 dim(Null(A))

dim(Col(A))

$\dim(\mathrm{Null}(A)) = n - \mathrm{rank}(A)$

kolonner i A

$\dim(\mathrm{Null}(A)) = 3 - 2 = 1$

Vi har sett at $\boldsymbol{v}$ er med i $\mathrm{Null}(A)$, altså kan denne vektoren danne en basis for $\mathrm{Null}(A)$:

3 $\mathrm{Null}(A) = \mathrm{Sp}\{\vec{v}\} = \underline{\mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$

Oppgave 12

La A være en $m \times n$-matrise hvor $m < n$. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) $\dim(\mathrm{Col}(A)) > 0$

$A_{m \times n}$ $m < n$ $\dim(\mathrm{Col}(A)) > 0$?

<u>NEI!</u> Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ingen pivotelementer $\Rightarrow \dim(\mathrm{Col}(A)) = 0$

b) $\dim(\text{Null}(A)) > 0$

Er $\dim(\text{Null}(A)) > 0$ når $A_{m \times n}$, $m<n$?

$m<n \Rightarrow$ # kolonner > # rader

"Bred matrise" $\begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}$

Vi kan tenke oss matrisen A som en tuppel med kolonnevektorer:

$$A = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \dots \mid \vec{v}_n)$$

Ettersom antall rader er mindre enn antall kolonner må kolonnevetorene være lineært **a**vhengige (Husk: 3 vektorer i $\mathbb{R}^2$ må være lin.**a**vh.)

$$m<n \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \text{ lin. avh.}$$

Dette betyr at det finnes koeffisienter der ikke alle er 0 som gjør at vi kan få en lineærkombinasjon av kolonnevektorene til å bli **0**:

$\hookrightarrow \exists\, c_1, c_2, \dots, c_n$ ikke alle 0 s.a.

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

Altså, det finnes ikke-trivielle løsninger av det homogene likningssystemet:

$$\hookrightarrow \exists\, \vec{c} \neq 0 \text{ s.a. } A\vec{c} = \vec{0}$$

Disse ikke-trivielle løsningene er elementer i $\text{Null}(A)$:

$$\Rightarrow \vec{c} \in \text{Null}(A)$$

Og siden nullrommet ikke er tomt så vil dimensjonen være større enn 0:

$$\Rightarrow \underline{\dim(\text{Null}(A)) > 0}$$