Plenumsregning 3: Vektorligninger og matriser

Kapittel 3: Vektorlikninger

Oppgave 1

La $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$.

a) Regn ut $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ og $\frac{1}{2}\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$.

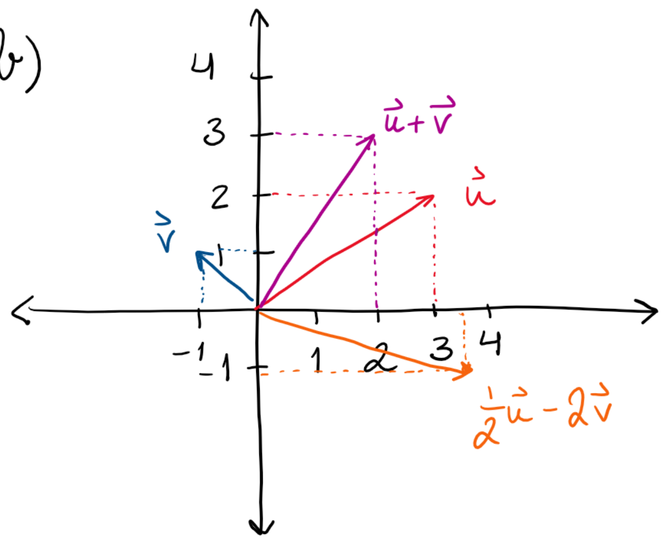
b) Tegn en figur som viser vektorene $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ og $\frac{1}{2}\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$ i planet.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b)



Oppgave 2

Finn ut om en vektor er en lineærkombinasjon av de andre:

$$\binom{1}{2}, \binom{2}{3}, \binom{3}{4}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Her kan vi f.eks. prøve å finne ut om ***w*** er en **lineærkombinasjon** av ***u*** og ***v***. Altså, finnes det koeffisienter *a* og *b* slik at vi kan skrive ***w*** som en en sum av *skalarmultipler* av ***u*** og ***v***?

$$\exists \; a, b \in \mathbb{R} \text{ s.a. } \underbrace{\overbrace{a\vec{u}}^{\text{skalar-multippel}} + b\vec{v}}_{\text{lin. komb.}} = \vec{w} \; ?$$

Vi sjekker:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b \\ 3b \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I)} &\quad a + 2b = 3 \\ \text{II)} &\quad 2a + 3b = 4 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) 2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} a &= -1 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Svar: $\vec{w}$ kan skrives som en lin. komb. av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ $\boxed{-\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w}}$

Oppgave 3

Finn en vektor som <u>IKKE</u> er en lineærkombinasjon av:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Husk: $\vec{x}$ er en lin.komb. av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ hvis $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ s.a. $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Her finnes det mange løsningsstrategier, og vi skal se på to av dem:

Strategi 1

1) Finne en vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ som <u>ER</u> en lin.komb. av $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$
2) Endre én komponent i $\boldsymbol{x}$ for å lage en ny vektor $\boldsymbol{y}$
3) Verifisere at $\boldsymbol{y}$ <u>IKKE</u> er en lin.komb. av $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$

Vi skal jo bare konstruere en vektor som er en lin.komb. av $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$, så a og b kan vi velge fritt. F.eks. kan vi la $a = 1$ og $b = 1$:

① La $a = b = 1$:

$$\vec{x} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 23 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 23 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nå vil vi vise at $\boldsymbol{y}$ IKKE er en lin.komb. av $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$, ved å sjekke at det IKKE finnes koeffisienter c og d slik at vi kan skrive $c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}$:

3 Vil vise: $c\vec{u} + d\vec{v} \neq \vec{y} \quad \forall c, d \in \mathbb{R}$

Vi sjekker:

3 Vil vise: $c\vec{u} + d\vec{v} \neq \vec{y} \quad \forall c, d \in \mathbb{R}$

$$c\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}4\\18\\4\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}5\\23\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c+4d\\5c+18d\\-3c+4d\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}5\\23\\0\end{pmatrix}$$

Vi sjekker:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & c + 4d = 5 \\ \text{II)} \quad & 5c + 18d = 23 \\ \text{III)} \quad & -3c + 4d = 0 \end{aligned} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 18 & 23 \\ -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-5) \\ 3 \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 16 & 15 \end{array}\right) \cdot(-1/2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 15 \end{array}\right) (-16)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Selvmotsigelse

$0 \neq 1$

Vi får en selvmotsigelse i siste rad. Det betyr at det ikke finnes et entydig sett av koeffisienter som gjør at vi kan skrive $\boldsymbol{y}$ som en lineærkombinasjon av $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$.

"Det finnes ikke" "Element i"

$$\Rightarrow \nexists\, c, d \in \mathbb{R} \text{ s.a. } c\vec{u} + d\vec{v} = \vec{y}$$

$$\Rightarrow \vec{y} = (5, 23, 0) \text{ er } \underline{\text{IKKE}} \text{ en lin. komb. av } \vec{u} \text{ og } \vec{v}$$

Det er også mulig å bare gjette på en vektor (f.eks. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$) og sjekke!

Vi et finnes riktignok en svært effektiv måte å lage en slik vektor. Da bruker vi kryssproduktet. Dette er sikkert kjent for noen fra VGS, men det er ikke definert i dette kurset.

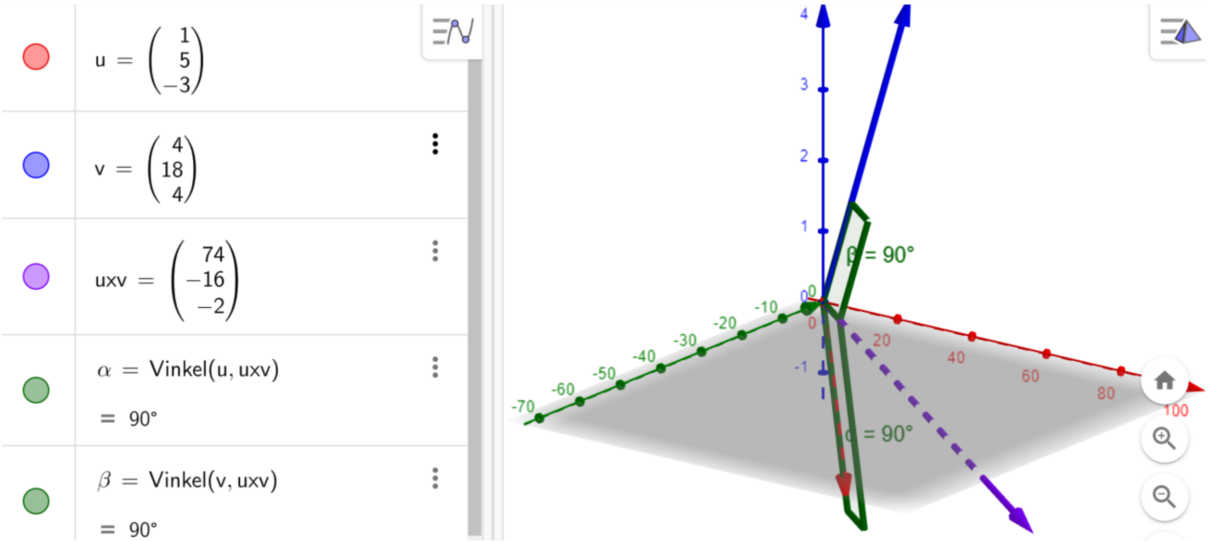
ALTERNATIV:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix}4\\18\\4\end{pmatrix}$$

Det er kjent at $\vec{u} \times \vec{v}$ IKKE er en linkomb. av $\vec{u}$ og $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left\| \begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 5 & -3\\ 4 & 18 & 4\end{pmatrix} \right\| = \vec{i}\,(5\cdot 4 - (-3)\,18) - \vec{j}\,(1\cdot 4 - (-3)4) + \vec{k}\,(1\cdot 18 - 5\cdot 4)$$

$$\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad = 74\vec{i} - 16\vec{j} - 2\vec{k} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}74\\-16\\-2\end{pmatrix}}}$$



Kapittel 4: Matriser

Oppgave 1

La A og B være matriser, og $\boldsymbol{v}$ en vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Regn ut eller forklar hvorfor uttrykkene ikke gir mening:

a) AB

b) BA

c) $\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}$

Generelt Gitt matriser (og vektorer) $A_{r\times k}$ og $B_{m\times n}$, må $k = m$ for at vi skal kunne finne matriseproduktet $A \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) $A_{3\times 3} \cdot B_{2\times 3}$

$3 \neq 2 \Rightarrow$ Gir ikke mening

b) $B_{2\times 3} \cdot A_{3\times 3}$

$3 = 3 \Rightarrow$ Gir mening

2×3 dimensjon

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 5\cdot(-8)] & [1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 5\cdot 0] & [1\cdot 5 + 2\cdot(-1) + 5\cdot 2] \\ [0\cdot 0 + 0\cdot 2 + 3(-8)] & [0\cdot 1 + 0\cdot 3 + 3\cdot 0] & [0\cdot 5 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 2] \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -36 & 7 & 13 \\ -24 & 0 & 6 \end{pmatrix}}}$$

e) $\vec{v}^T \cdot \vec{v}$

$$\vec{v}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^T_{1\times 3} = (7, 2, -4)$$

Vi finner den transponerte ved å bytte om rader og kolonner, s.a. første rad blir første kolonne osv.

$$\vec{v}^T_{\underline{1}\times 3} \cdot \vec{v}_{3\times \underline{1}}$$

$3 = 3 \Rightarrow$ Gir mening, 1×1 dimensjon

$$(7, 2, -4) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = (7\cdot 7 + 2\cdot 2 + (-4)(-4))$$

$$= (\underbrace{49 + 4}_{} \, \underbrace{+ 16}_{20}) = \underline{\underline{69}}$$

Oppgave 4

Bestem om matrisene er inverterbare, og finn om mulig den inverse matrisen.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Def: La A være en $n \times n$-matrise. En **invers** til A er en $n \times n$-matrise B som er slik at $A \cdot B = I_n = B \cdot A$. En matrise er **inverterbar** hvis den har en

Fremgangsmåte

1) Sett opp matrisen $(A|I)$
2) Utfør Gauss-Jordan eliminasjon til redusert trappeform
3) Matrisen til høyre er inversen

Identitetsmatrisen

$$(A \mid I) \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot 1/8$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/8 & 1/8 \end{array}\right) \cdot(-7) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/8 & -7/8 \\ 0 & 1 & 1/8 & 1/8 \end{array}\right)$$

$= A^{-1}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eksamen vår 2019

Oppgave 6

La $p(x) = 3x^2 - 3x - 6$, $q(x) = x^2 - x - 8$ og $r(x) = 4x^2 - 9x + 3$.

Avgjør om $r(x)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av p(x) og q(x).

La $p(x) = 3x^2 - 3x - 6$

$q(x) = x^2 - x - 8$

$r(x) = 4x^2 - 9x + 3$

$\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ s.a. $r(x) = ap(x) + bq(x)$?

$$a(3x^2 - 3x - 6) + b(x^2 - x - 8) = 4x^2 - 9x + 3$$

$$3ax^2 - 3ax - 6a + bx^2 - bx - 8b = 4x^2 - 9x + 3$$

I) $3ax^2 + bx^2 = 4x^2$

II) $-3ax - bx = -9x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

III) $-6a - 8b = 3$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -9 \\ -6 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ -6 & -8 & 3 \end{array}\right)$$

Selvmotsigelse $0 \neq 5$

Svar: $r(x)$ kan ikke skrives som en lin.komb. av $p(x)$ og $q(x)$ ettersom $\nexists a,b \in \mathbb{R}$ s.a. $a\,p(x) + b\,q(x) = r(x)$

Eksamen vår 2018

Oppgave 4

Anta at a, b, c og x, y, z er vilkårlige reelle tall.

a) Beregn matriseproduktet

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3×3 $\quad$ 3×3

$$= \begin{pmatrix} [1\cdot 1 + a\cdot 0 + b\cdot 0] & [1\cdot x + a\cdot 1 + b\cdot 0] & [1\cdot y + az + b\cdot 1] \\ [0\cdot 1 + 1\cdot 0 + c\cdot 0] & [0\cdot x + 1\cdot 1 + c\cdot 0] & [0\cdot y + 1\cdot z + c\cdot 1] \\ [0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0] & [0\cdot x + 0\cdot 1 + 1\cdot 0] & [0\cdot y + 0z + 1\cdot 1] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (x+a) & (y+az+b) \\ 0 & 1 & (z+c) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Hva er den inverse til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c?

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A \mid I) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (-c) \\ (-b) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-a) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{I_3} \qquad \underbrace{}_{= A^{-1}}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mer om prikkprodukt og matrisemultiplikasjon

Prikkprodukt

På VGS lærte vi at *prikkproduktet* mellom to vektorer $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ og $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ var definert som følger:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Resultatet blir altså et tall.

Dersom disse vektorene betraktes som kolonnevektorer (altså matriser på med dimensjon $m \times 1$), kan prikkproduktet også beskrives som følgende matriseprodukt:

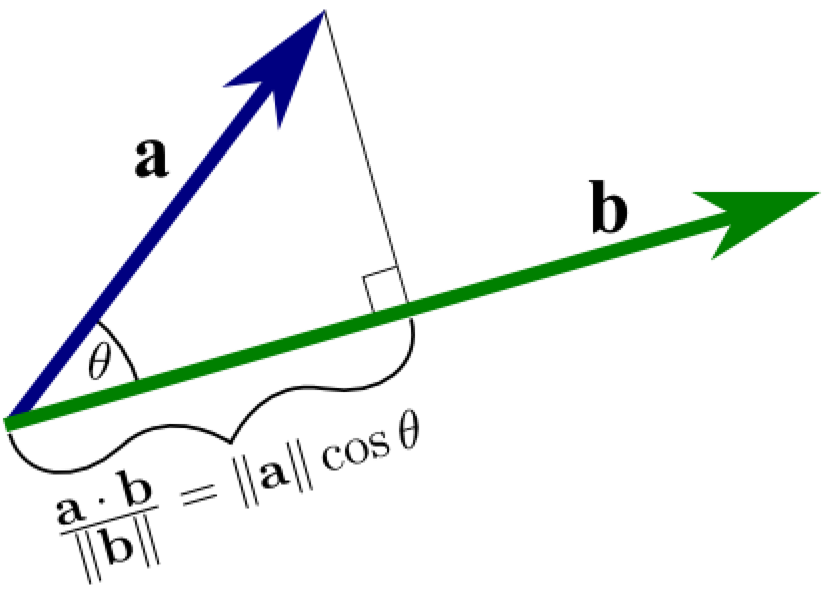
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{b}$$

hvor $\boldsymbol{a}^\top$ er den transponerte av $\boldsymbol{a}$.

Geometrisk kan prikkproduktet av vektorene $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ defineres som

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos \theta$$

hvor θ er vinkelen mellom $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ (Dot product, 2024).



Figur 1: Vektorene $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ og vinkelen θ mellom dem (Hentet fra Nykamp, n.d.).

Matrisemultiplikasjon

Vi har lært at vi kun kan multiplisere matriser dersom de har kompatible dimensjoner, dvs. at antall kolonner i den første matrisen må være likt antall rader i den andre matrisen (Varsity Tutors, n.d.). Altså, hvis $A = [a_{ij}]$ er en $r \times k$-matrise og $B = [b_{ij}]$ er en $m \times n$-matrise, må $k = m$ for at vi skal kunne regne ut produktet $A \cdot B$. Den resulterende matrisen vil være en $r \times n$-matrise.

$A \cdot B = [c_{ij}]$, hvor $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{kj}$.

Merk**:** Selv om vi har brukt samme notasjon for prikkproduktet og matrisemultiplikasjon vil vi alltid vite hva det refereres til ut fra oppgaveteksten.

Kilder

Dot product (2024, January 16). I *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Dot_product&oldid=1196149711

Varsity Tutors. (n.d.). *Matrix multiplication*. https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/topics/matrix-multiplication

Nykamp, D. Q. (n.d.). *The dot product*. I Math Insight. https://mathinsight.org/dot_product