Plenumsregning 2: Mer om komplekse tall + lineære likningssystemer

Ekstraoppgaver: Komplekse tall

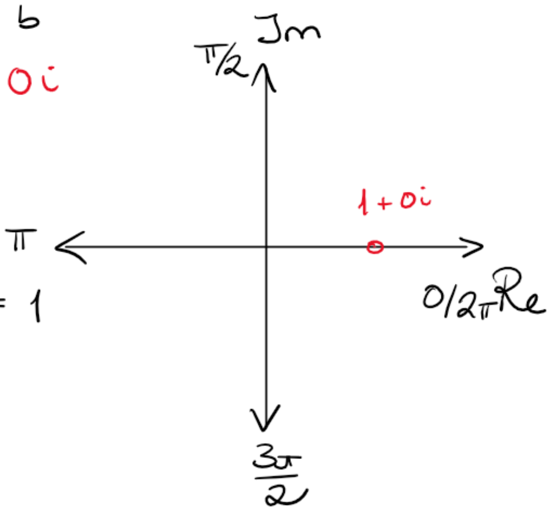
Oppgave 8

Finn alle tredjerøttene til 1.

Tegn en rett linje fra løsning til løsning etter økende vinkel. Hvilken geometrisk figur er dette?

Når vi jobber med komplekse tall bør vi alltid skissere dem i det komplekse planet:

$$\overset{a}{1} + \overset{b}{0}i$$



$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+0^2} = 1$$

$$\theta = 0$$

3. gradspol.

$$z^3 = 1 = e^{i0}$$

Jmfr. algebraens fundamentalteorem vil et 3. gradspol. alltid ha 3 komplekse røtter:

Algebraens fundamentalteorem

> La $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0, c_i \in \mathbb{C}$.
>
> Da finnes komplekse tall $r_1, r_2, \ldots, r_n$ slik at
>
> $$p(z) = c_n (z - r_1)(z - r_2) \ldots (z - r_n)$$
>
> Dvs. et n-te gradspolynom har alltid n komplekse røtter.

Finne z_0, z_1, z_2 s.a. $z_k = \sqrt[3]{1}$ for $k = 0, 1, 2$

Vi løser tredjegradslikningen:

$$z^3 = r^3 e^{i3\theta} = 1^3 e^{i0} = 1$$

$$\Rightarrow r^3 = 1 \quad \Rightarrow r = 1$$

heltall

$3\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$ $\qquad 3\theta = 0 + 2\pi n$

$3\theta = 2\pi \rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$3\theta = 4\pi \rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$

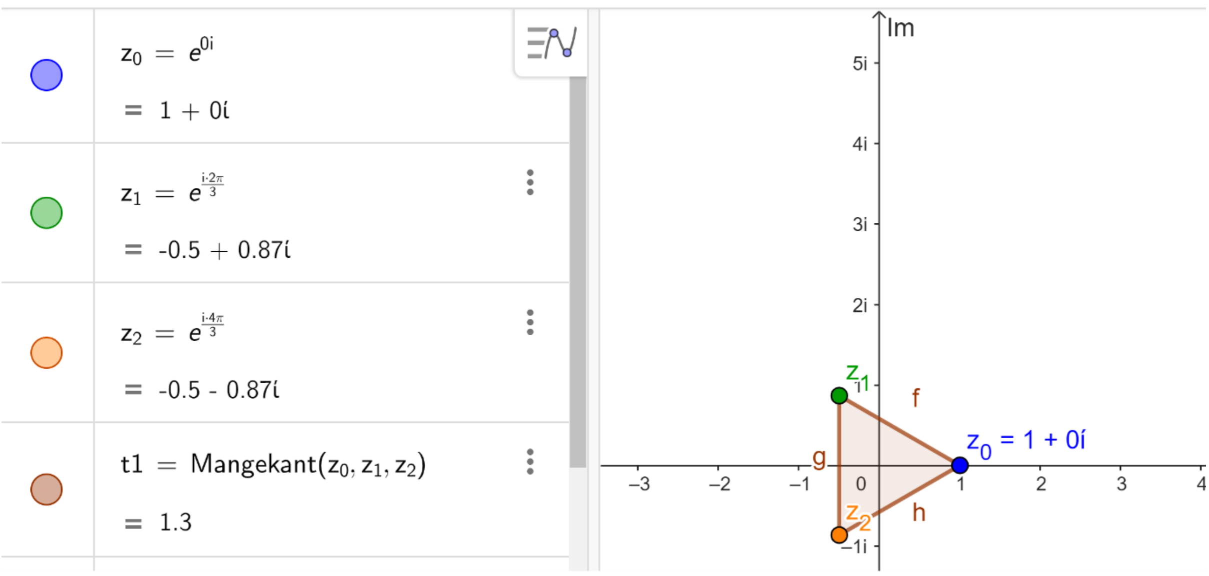
Dette gir oss 3 røtter:

$$z_0 = 1 e^{i0} = 1$$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Vi tegner røttene i det komplekse planet:



Dette blir en **trekant.** Dersom vi ønsker å tegne røttene for hånd er det også mulig.

Merk:

- z_1 og z_2 er hverandres komplekskonjugerte. Generelt er det slik at hvis alle koeffisientene c_i er relle og $r = a + ib$ er en rot, så er også og $\bar{r} = a + ib$ en rot.
- z_0, z_1, z_2 er ekvidistante. Generelt er det slik at de n n-te røttene til et komplekst tall z vil være punkter med lik avstand rundt sirkelen med radius lik $|z|^{\frac{1}{n}}$.

Oppgave 9

La $z \neq 0$ og $w \neq 0$ være komplekse tall. Vis at $zw \neq 0$.

Vet: $z, w \in \mathbb{C}$, $z, w \neq 0$

Vil vise: $z \cdot w \neq 0$

Idé: Polarform

Bevis:

$$z = re^{i\theta}$$

$$w = se^{i\phi}$$

$$z \cdot w = re^{i\theta} \cdot se^{i\phi} = \underbrace{rs}_{\neq 0}\underbrace{e^{i(\theta+\phi)}}_{\neq 0}$$

- Produktet $r \cdot s$ kan ikke være 0 når verken r eller s er 0.
- Potensen $e^{i(\theta+\varphi)}$ kan heller ikke være 0 fordi det ikke finnes noe tall vi kan opphøye e i for å få 0.

Når ingen av faktorene er 0, kan heller ikke produktet være null. Dermed har vi bevist at $z \cdot w \neq 0$, når verken z eller w er 0.

$$\Rightarrow z \cdot w \neq 0 \qquad \square$$

Ekstraoppgaver: Lineære likningssystemer

Oppgave 4

a) Løs ligningssettene

$$2x - y + z = 0$$
$$3x + y - 6z = 0$$
$$4x - 2y + 2z = 0$$

og

$$2x - y + z = 1$$
$$3x + y - 6z = 4$$
$$4x - 2y + 2z = 2$$

og forklar sammenhengen mellom løsningsmengdene.

Skriver likningssettene på **matriseform** ved å kopiere koeffisientene::

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Homogent sys. Inhomogent sys.

Vi skal løse disse hver for seg. For å løse dem, altså finne verdier for x, y og z som tilfredsstiller likningene, skal vi manipulere dette systemet ved å utføre såkalte elementære radoperasjoner:

Radoperasjoner

1. *Gange alle tallene i en rad med det samme tallet.* Dette tilsvarer å gange likningen med et tall. Vi kan ikke gange med 0.
2. *Legge til et multiplum av en rad til en annen rad.* Dette er å kombinere likninger til nye likninger.
3. *Bytte rekkefølge på radene.* Dette er det samme som å bytte rekkefølge på likningene.

Å gjøre disse operasjonene for å løse systemet tilsvarer å bruke **addisjonsmetoden**, som noen kanskje husker fra VGS.

Vi begynner med å se på det **homogene ligningssystemet**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \cdot\left(\tfrac{-3}{2}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -15/2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) (-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -15/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\ \cdot\left(\frac{2}{5}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad\quad - z = 0 \\ \quad\quad y - 3z = 0 \\ \quad\quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 3z \\ z = t, \end{cases}$$

z fri variabel

t skalar

Vi ser at variablene x og y er avhengig av variabelen z. z kalles en **fri variabel**. Det er vanlig å gi den frie variabelen et nytt navn, og vi kaller den t. Vi kan velge t fritt blant alle skalarer, da alle disse vil fungere som løsninger for likningssystemet. Med andre ord har dette likningystemet **uendelig mange løsninger**. Vi skriver løsningen på vektorform:

"For alle"

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x = t \\ y = 3t \\ z = t \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

"Element i"

Vi skal erfare at likningssystemer kan ha:

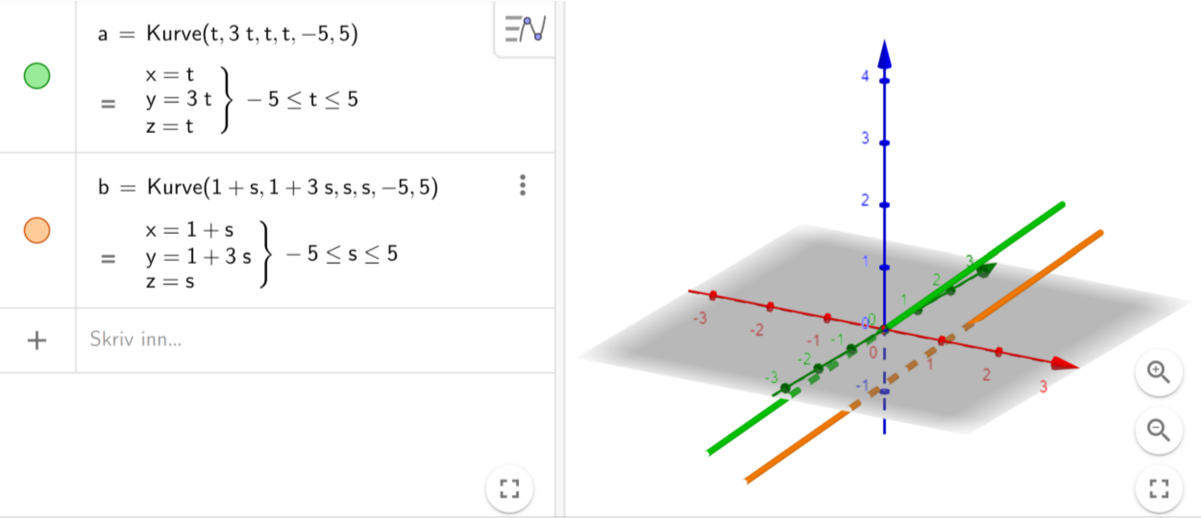
1) Ingen løsninger
2) Nøyaktig én løsning
3) Uendelig mange løsninger

Tilsvarende utfører vi radoperasjoner for det **inhomogene ligningssystemet**, men denne gangen overlater jeg mellomregningene til dere (:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad - z = 1 \\ \quad y - 3z = 1 \\ \quad\quad z = s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 3s \\ z = s \end{cases}, \quad s \text{ skalar}$$

Løsningsmengdene for hvert av likningssystemene svarer til en rett linje i $\mathbb{R}^3$, parametrisert ved de frie variablene t og s. Linjene vil være parallelle. Dette kan vi illustrere f.eks. ved hjelp av GeoGebra:



b) Kan du finne a, b *og* c slik at

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= a \\ 3x + y - 6z &= b \\ 4x - 2y + 2z &= c \end{aligned}$$

<u>*ikke*</u> har noen løsning?

- Altså, kan vi finne verdier for a, b og c sånn at dette systemet ikke har noen løsning?
- Først, når er det et system ikke har løsninger? Jo, et system har ikke noen løsning(er) dersom vi har en rad (altså en likning) med *selvmotsigelser*.
- Vi har en **selvmotsigelse** dersom vi har en rad hvor noe som er 0 er lik noe som IKKE er 0. Noe sånt som dette:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right) \quad k \neq 0$$

MÅL: Finne a, b, c s.a. vi får en selvmotsigelse

Da vi løste det ***homogene likningssystemet*** i oppgave a) så vi at siste rad ble en nullrad når a, b, c alle var 0:

Husk: I a) så vi at siste rad ble en nullrad når

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nå skal vi prøve å **gjette** på noen konstanter a, b, c som gir oss 0-er på venstre side, og noe som IKKE er 0 på høyre side.

Vi prøver med $a = 0, b = 0$ og $c = 1$.

Idé: Prøve $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \left(-\frac{3}{2}\right) \\ (-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -15/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$0x + 0y + 0z = 1$ Selvmotsigelse!

Svar: $a = 0, b = 0, c = 1$ gjør systemet inkonsistent

Oppgave 2

Hvilke av disse matrisene er på trappeform?
Hvilke av dem er på redusert trappeform?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

For å løse oppgaven må vi vite hva trappeform og redusert trappeform er, og da må vi først vite hva et pivotelement er:

Def: Tallet lengst til venstre i en rad som ikke er 0 kalles *pivotelementet* for den raden. En nullrad har ikke noe pivotelement.

Def: En matrise er på *trappeform* dersom:

- pivotelementet i hver rad er lengre til høyre enn pivotelementet i raden over
- Eventuelle nullrader er nederst.

Def: En matrise er på *redusert trappeform* hvis den er på trappeform og dessuten oppfyller:

- Alle pivotelementene er 1.
- Alle tall som står over pivotelementer er 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Pivotelement

Trappeform fordi pivotelement i hver rad er lengre til høyre enn i raden over
Redusert trappeform fordi alle pivotelement er 1 og alle tall over disse er 0.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Verken trappeform eller redusert trappeform

- Ikke på trappeform fordi ikke alle pivotelementer har 0 under seg.
- Når matrisen ikke er på trappeform kan den heller ikke være på redusert trappeform.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Trappeform, men ikke redusert

- Trappeform fordi det står 0 under alle pivotelementer.
- Ikke på redusert trappeform fordi det finnes et ikke-null element over et pivotelement, og fordi ikke alle pivotelementer er 1.

Oppgave 3

Løs likningssystemet med totalmatrise

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{array}\right]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \bar{i} = -i \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

fri variabel

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 1 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Skalar

Oppgave 6

Anta at vi har et ligningssystem med m ligninger og n ukjente. Hvilke av de ni forkjellige tilfellene i følgende tabell er mulige?

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
Ingen løsninger	M	M	M
Én løsning	U	M	M
Uendelig mange løsninger	M	M	M

"antall"

m = # likninger (rader)
n = # ukjente (kolonner)

Strategi: Eksempel på at det er mulig

Vi tar for oss hvert av tilfellene. Først, la oss se på dette med 'Ingen løsninger' - Uavhengig av antall rader/kolonner kan vi ha selvmotsigelser i systemet, og dermed ingen løsninger:

INGEN LØSNINGER

↳ Uavh. av # rader kan vi alltid finne et system m. minst én selvmotsigelse (M)

Så til 'Uendeling mange løsniger':

∞ MANGE LØSNINGER

↳ Én/flere frie variabler

i) $m<n$

Ex: $x+y=0$

y fri ⇒ (M)

ii) $m=n$

Ex: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x+y=0 \\ y=t \end{array}$ (M)

NØYAKTIG ÉN LØSN

i) $m=n$

Ex: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Én løsn. (M)

ii) $m>n$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (M)

iii) $m<n$

↳ Flere ukjente ⇒ Frie variable ⇒ ∞ mange løsn

↳ Selvmotsigelser ⇒ 0 løsn.

⇒ Én løsning umulig

Eksamen vår 2019

Oppgave 1

b) Finn alle komplekse løsninger av systemet

$$x - y + iz = 0$$
$$-x + iy - z = 0$$

Vi skriver systemet på matriseform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ -1 & i & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ 0 & -1+i & -1+i & 0 \end{array}\right) \cdot \overline{(-1+i)}$$

For å dele på komplekse tall ganger vi med den konjugerte over og under brøkstrek. Vi skriver opp mellomregningen:

Mellomregning: $\overline{(-1+i)} = -1-i$

$$(-1+i)(-1-i) = 1 + \cancel{i} - \cancel{i} \underbrace{-i^2}_{=1} = 2$$

Dette gir:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i+1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x + (i+1)z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -(1+i)z \\ y = -z \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -(1+i)t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+i) \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad \forall t \in \mathbb{C}$$