Plenumsregning 1: Komplekse tall

Ekstraoppgaver

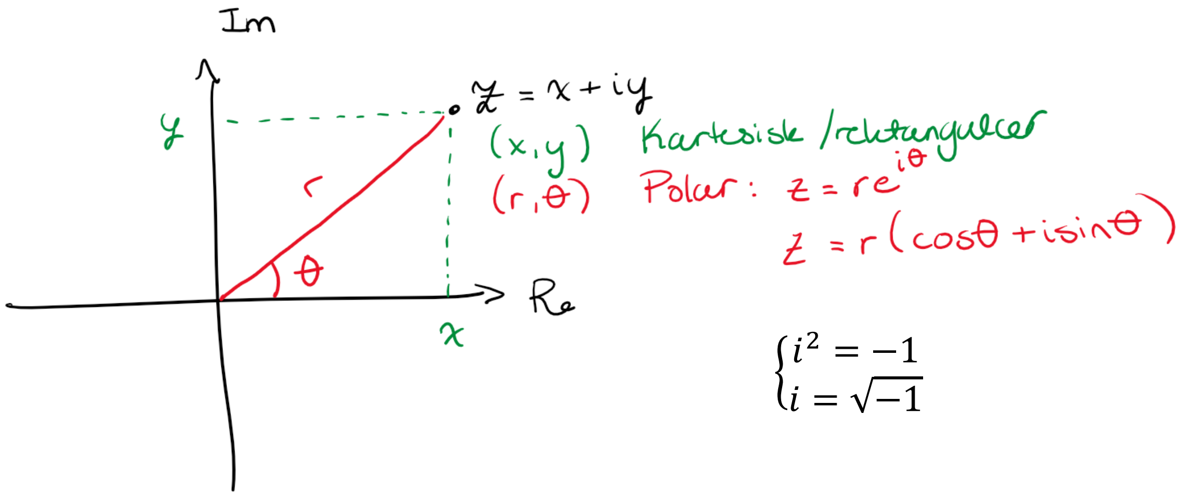
Oppgave 1

Beregn og merk av i det komplekse planet. Husk at det kan være lurt å bruke polarform.

b) $(1+i)\cdot(1+\sqrt{3}i)$

Det komplekse planet inneholder en reell akse og en imaginær akse. Komplekse tall befinner seg i det komplekse planet, og har en reell komponent og en imaginær komponent. Vi kan illustrere et generelt komplekst tall z slik:

Generelt:



$$\begin{cases} i^2 = -1 \\ i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

Kartesiske og polare koordinater er to forskjellige måter å oppgi posisjonen til tallet vårt.

- **Kartesisk**: x steg i reell retning + y steg i imaginær retning
- **Polar**: med en vinkel θ fra den reelle aksen, beveger vi oss en lengde r

Regne ut:

$$\underbrace{(1+i)}_{z_1}\cdot\underbrace{(1+\sqrt{3}\,i)}_{z_2} \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Plan: Polarform

$$z_1 = \overset{x}{1} + \overset{y}{i}$$

Pythagoras: $r_1 = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\theta_1 = ?$

$$\tan\theta_1 = \frac{\text{mot}}{\text{hos}} = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_2 = \overset{x}{1} + \overset{y}{\sqrt{3}}\,i$$

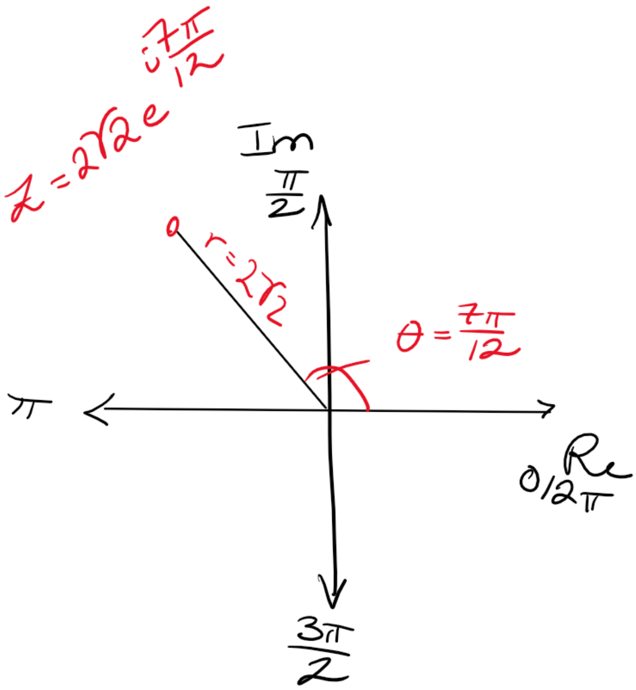
$$r_2 = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{z_2 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \cdot 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}}}$$

Tips: Hvis vi synes det er krevende å tegne reelle tall ut fra polarformen, kan vi bytte fra polare til rektangulære/kartesiske koordinater. Da regner vi ut $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.



Oppgave 3

La $z = a + bi$. Finn real- og imaginærdelen til

d) $\frac{1}{z^2}$

$$z = a + bi$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(a+bi)^2} = \frac{1}{a^2 + 2abi + b^2 i^2} = \frac{1}{\underbrace{a^2 - b^2}_{x} + \underbrace{2abi}_{y}}$$

$i^2 = -1$

TRIKS: Gange med den konjugerte oppe og nede.

Husk: $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

$$\overline{a^2 - b^2 + 2abi} = a^2 - b^2 - 2abi$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(a^2-b^2) + 2abi} \cdot \frac{(a^2-b^2) - 2abi}{(a^2-b^2) - 2abi} = \frac{(a^2-b^2) - 2abi}{(a^2-b^2)^2 - (2abi)^2}$$

Husk: 3. kvadratsetning
$(x + y)(x - y) = (x^2 - y^2)$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{(a^2-b^2) - 2abi}{(a^2-b^2)^2 - 4a^2b^2 i^2} = \frac{(a^2-b^2) - 2abi}{(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2}$$

$i^2 = -1$

$$= \underbrace{\frac{a^2 - b^2}{(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2}}_{\text{Reell}} + i \underbrace{\frac{2ab}{(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2}}_{\text{Imaginær}}$$

Innlevering 1 H2023 TMA4110

Oppgave 6

Finn real- og imaginærdelen til $z = i^3 + i^i$.

Vi ønsker altså å skrive z på kartesisk form. Dette må vi gjøre i flere steg.

$$z = re^{i\theta} \text{ (polar)}$$

$$z = i^3 + i^i \qquad \boxed{z = a + bi} \text{ (kartesisk)}$$

Vi skriver først om tallet i^3:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = \underline{-i}$$

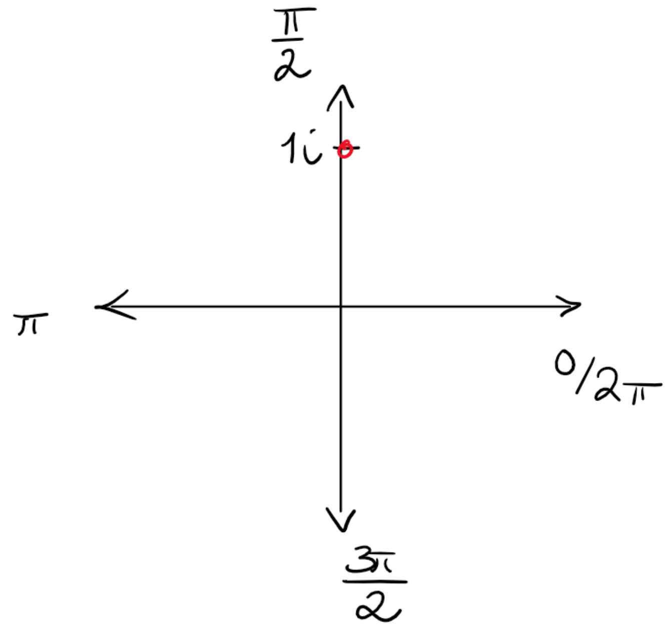
Vi finner så tallet i på polarform. Legg merke til at her kan vi ikke benytte $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ for å finne vinkelen, men vi kan lese det av figuren:

$$i = 0 + 1i \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{i = e^{i\frac{\pi}{2}}}$$



Deretter setter vi inn for i i uttrykket for i^i:

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i\frac{\pi}{2}\cdot i} = e^{\overset{-1}{i^2}\frac{\pi}{2}} = \underline{e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

Til slutt setter vi inn for i^3 og i^i i det opprinnelige uttrykket for z:

$$\Rightarrow \quad z = i^3 + i^i = -i + e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Imaginær Reell