Kapittel 8

Lineærtransformasjoner

I forrige kapittel begynte vi å formulere lineær algebra på en generell måte, ved å gi en abstrakt definisjon av vektorrom. For å beskrive sammenhenger mellom forskjellige vektorer og vektorrom trenger vi også å se på funksjoner som tar inn vektorer og gir ut vektorer. For to vektorrom V og W er vi interessert i de funksjonene fra V til W som *bevarer vektorromsstrukturen.* Slike funksjoner kaller vi lineærtransformasjoner.

Funksjoner

Siden lineærtransformasjoner er en spesiell type funksjoner, begynner vi med å minne om en del generelle ting om funksjoner. Aller først definerer vi presist hva en funksjon er. En *funksjon* består av:

1. En mengde som kalles funksjonens *domene.*

2. En mengde som kalles funksjonens *kodomene.*

3. En regel som til hvert element i domenet tilordner et element i kodomenet.

Vi bruker notasjonen $f\colon A \to B$ for å angi at f er en funksjon med mengden A som domene og mengden B som kodomene.

Fra før er du antagelig mest vant til funksjoner som har mengden $\mathbb{R}$ av reelle tall som både domene og kodomene, som for eksempel $f(x) = 3x^2 + 1$, eller $f(x) = \sin x$ eller $f(x) = e^x$. Følgende egenskaper vil spille en viktig rolle for oss.

Definisjon. La $f\colon A \to B$ være en funksjon.

Vi sier at f er *injektiv* (eller *en-til-en*) hvis det for hver b i B er maksimalt én a i A slik at $f(a) = b$.

Vi sier at f er *surjektiv* (eller *på*) hvis det for hver b i B finnes en a i A slik at $f(a) = b$.

Bildet til f er mengden av alle elementer i kodomenet som blir truffet av f, altså delmengden

$$\operatorname{im} f = \{f(a) \mid a \in A\}$$

av B. △

Det følger umiddelbart fra definisjonen at en funksjon $f\colon A \to B$ er surjektiv hvis og bare hvis bildet til funksjonen er hele kodomenet: $\operatorname{im} f = B$.

> Oppgave: Sjekk om følgende funksjoner er inektive eller surjektive:
> $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
> $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = e^x$
> $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 3x + 1.$

Lineærtransformasjoner

Husk at en $m \times n$-matrise A over $\mathbb{R}$, gir opphav til en funksjon $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, nemlig $f_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$. Vi så i kapitlet om matriser at

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

og at

$$A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$$

for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ og skalarer c. Altså at

$$f_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f_A(\mathbf{u}) + f_A(\mathbf{v})$$

og

$$f_A(c\mathbf{u}) = c \cdot (f_A(\mathbf{u})).$$

Det er funksjoner med denne egenskapen vi skal studere i dette kapitlet. Vi kaller de *lineærtransformasjoner.* Tilslutt vil vi se at alle lineærtransformasjoner egentlig kan beskrives ved hjelp av en matrise (for endeligdimensjonale vektorrom).

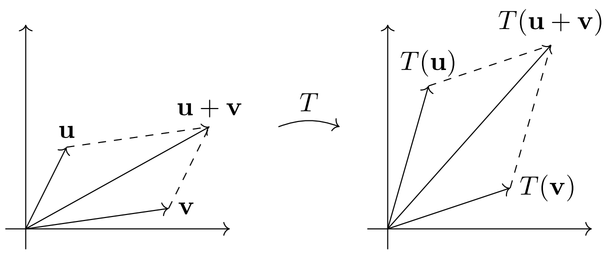
Vi gjør dette presist og generelt i følgende definisjon.

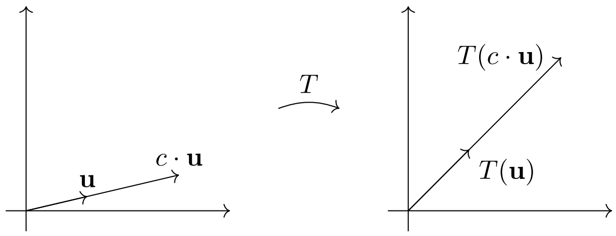
Definisjon. La V og W være vektorrom. En funksjon $T\colon V \to W$ er en *lineærtransformasjon* hvis den oppfyller følgende to kriterier:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V.

2. $T(c\mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ i V og alle skalarer c. △

Vi kan illustrere de to kravene til en lineærtransformasjon slik:





Lineærtransformasjonen T bevarer addisjon og skalarmultiplikasjon

Eksempel 8.1. Vi definerer $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ved:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

La oss nå sjekke om denne funksjonen er en lineærtransformasjon. Vi regner ut:

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2(u_3 + v_3) \\ (u_1 + v_1) - 3(u_2 + v_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2u_3 \\ u_1 - 3u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2v_3 \\ v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Funksjonen T oppfyller altså kravet om å bevare addisjon. Vi sjekker at den også oppfyller kravet om å bevare skalarmultiplikasjon:

$$\begin{aligned} T\left(c \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 2(cu_3) \\ cu_1 - 3(cu_2) \end{bmatrix} \\ &= c\begin{bmatrix} 2u_3 \\ u_1 - 3u_2 \end{bmatrix} = c \cdot T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Vi har nå sjekket at funksjonen T oppfyller begge kravene i definisjonen, så den er en lineærtransformasjon. △

> Spørsmål: Lineærtransformasjonen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i eksemplet over, kan beskrives ved hjelp av ei 2×3-matrise A. Altså slik at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Finn A!

Eksempel 8.2. Vi definerer $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 1 \end{bmatrix}$$

Nå kan vi for eksempel legge merke til at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{men} \quad T\left(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi har altså

$$T\left(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \neq 2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

så T er ikke en lineærtransformasjon. △

Her er noen egenskaper ved lineærtransformasjoner som følger ganske enkelt fra definisjonen, kombinert med aksiomene for vektorrom:

Teorem 8.3. *Hvis $T\colon V \to W$ er en lineærtransformasjon, så oppfyller den følgende.*

(a) En lineærkombinasjon i V sendes til den tilsvarende lineærkombinasjonen i W:

$$\begin{aligned} &T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r) \\ &\quad = c_1 \cdot T(\mathbf{v}_1) + c_2 \cdot T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_2 \cdot T(\mathbf{v}_r) \end{aligned}$$

(b) Nullvektoren i V sendes til nullvektoren i W:

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Enhver lineærtransformasjon er fullstendig bestemt av hvordan den virker på en basis. Altså: hvis vi vet hvordan T virker på basisvektorene, vet vi hvordan T virker på alle vektorene.

Teorem 8.4. *La V og W være endeligdimensjonale vektorrom og la $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon. Anta $\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ er en basis for V. Da er T fullstendig bestemt av bildene $T(\mathbf{b}_1), \ldots, T(\mathbf{b}_n)$ av basisvektorene.*

Bevis. Vi vet at enhver vektor v i V kan skrives på en entydig måte som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{b}_n.$$

Fordi T er en lineærtransformasjon, er da $T(\mathbf{v})$ gitt ved

$$T(\mathbf{v}) = c_1 \cdot T(\mathbf{b}_1) + \cdots + c_n \cdot T(\mathbf{b}_n).$$

□

Eksempel 8.5. Anta at $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en lineærtransformasjon slik at

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kan vi ut fra dette finne ut hva

$$T\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

må være? Vi ser at vi kan skrive $\left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ som en lineærkombinasjon av $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ og $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ved å bruke teorem 8.3 (a) får vi nå:

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right) &= T\left(4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right) \\ &= 4 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) - 2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right) \\ &= 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mer generelt kan vi se at siden de to vektorene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

utspenner $\mathbb{R}^2$, er det nok å vite hva T gjør med hver av disse for å vite hva den gjør med en hvilken som helst vektor. △

> Spørsmål: La $R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være funksjonen som roterer planet med vinkelen θ.
> Er R_θ en lineærtransformasjon?

Nå har vi sett noen eksempler på lineærtransformasjon mellom vektorrom på formen $\mathbb{R}^n$. Vi tar med ett eksempel på en lineærtransformasjon der domenet er et litt annerledes vektorrom.

Eksempel 8.6. Vi husker fra forrige kapittel at $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ er vektorrommet som består av alle kontinuerlige funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. La $T\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ være funksjonen gitt ved:

$$T(f) = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix}$$

Hvis vi for eksempel ser på en funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ gitt ved

$$f(x) = 3x^2 + 1,$$

så har vi:

$$T(f) = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi sjekker at T er en lineærtransformasjon:

$$\begin{aligned} T(f+g) &= \begin{bmatrix} (f+g)(0) \\ (f+g)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0)+g(0) \\ f(1)+g(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \end{bmatrix} = T(f) + T(g) \end{aligned}$$

$$T(cf) = \begin{bmatrix} (cf)(0) \\ (cf)(1) \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} = c \cdot T(f)$$

Vi kan observere at for enhver vektor $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$ i $\mathbb{R}^2$ kan vi definere en funksjon f i $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ved

$$f(x) = (b-a)x + a,$$

og da får vi:

$$T(f) = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Dette betyr at funksjonen T treffer alle vektorene i $\mathbb{R}^2$, slik at $\operatorname{im} T = \mathbb{R}^2$, og T er surjektiv.

Men T er ikke injektiv: Vi kan for eksempel se på to funksjoner f og g i $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ gitt ved:

$$f(x) = 0 \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 - x$$

Da har vi at

$$T(f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T(g),$$

men $f \neq g$, så T er ikke injektiv. △

Kjerne og bilde

For enhver funksjon $f\colon A \to B$ har vi definert bildet $\operatorname{im} f$, som er delmengden av kodomenet B bestående av alle elementer funksjonen treffer. For en lineærtransformasjon har vi også en delmengde av domenet som det er naturlig å knytte til lineærtransformasjonen, nemlig mengden av alle vektorer som sendes til nullvektoren.

Definisjon. La $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon. *Kjernen* til T er mengden av alle vektorer i V som blir sendt til nullvektoren i W:

$$\ker T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$ △

Eksempel 8.7. La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen gitt ved:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

Vi vil finne kjernen og bildet til T.

Vi ser at en vektor $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$ blir sendt til nullvektoren hvis og bare hvis de to komponentene x_1 og x_2 er samme tall, så kjernen blir mengden

$$\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Siden

$$x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2),$$

ser vi at alle vektorer vi når ved å anvende T må være på formen

$$\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}.$$

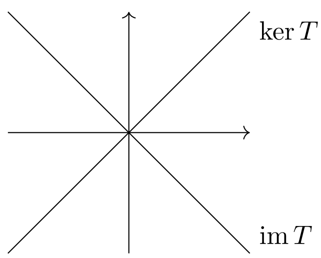
Vi ser dessuten at vi kan nå alle slike vektorer, siden vi for hvert tall a har at

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}.$$

Det betyr at

$$\operatorname{im} T = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vi har altså at både kjernen og bildet er rette linjer i $\mathbb{R}^2$:



Spesielt betyr dette at både bildet og kjernen er underrom av $\mathbb{R}^2$. △

I eksempelet hadde vi en lineærtransformasjon med $\mathbb{R}^2$ som både domene og kodomene, og vi så at både bildet og kjernen ble underrom av $\mathbb{R}^2$. Dette var ingen tilfeldighet, for vi kan vise generelt at kjernen til en lineærtransformasjon alltid må være et underrom av domenet, og bildet alltid et underrom av kodomenet.

Teorem 8.8. *La $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon.*

(a) Kjernen $\ker T$ er et underrom av V.

(b) Bildet $\operatorname{im} T$ er et underrom av W.

Vi vet at en lineærtransformasjon $T\colon V \to W$ er surjektiv hvis og bare hvis $\operatorname{im} T = W$ (dette holder generelt for alle funksjoner, ikke bare lineærtransformasjoner). Vi skal nå se at det på samme måte er en nær sammenheng mellom kjernen til T og hvorvidt T er injektiv.

Hvis T er injektiv, så er det maksimalt én vektor i V som T sender til nullvektoren i W. Men vi vet jo at T må sende nullvektoren i V til nullvektoren i W. Dermed får vi at $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Vi kan også vise at den motsatte implikasjonen holder, og da får vi følgende teorem.

Teorem 8.9. *En lineærtransformasjon $T\colon V \to W$ er injektiv hvis og bare hvis* $\ker T = \{\mathbf{0}\}$.

Bevis. Vi har allerede vist at hvis T er injektiv, så er $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Da gjenstår det å vise at hvis $\ker T = \{\mathbf{0}\}$, så er T injektiv.

Vi antar derfor at $\ker T = \{\mathbf{0}\}$, og vi ser på to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V som er slik at

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}).$$

Vi vil vise at dette medfører at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ må være den samme vektoren. Vi kan flytte over $T(\mathbf{v})$ til venstre side og få:

$$T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Vi har $T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, siden T er en lineærtransformasjon. Dermed har vi

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

som betyr at $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ligger i kjernen til T. Antagelsen vi startet med var at den eneste vektoren i kjernen til T er nullvektoren, så dette vil si at

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

altså at $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Vi har altså vist at hvis $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$, så er $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, og det vil si at T er injektiv. □

Dette teoremet forteller oss at det er lettere å finne ut om en lineærtransformasjon T er injektiv enn om en vilkårlig funksjon er injektiv. Det eneste vi trenger å sjekke er hva kjernen er, altså hvilke vektorer T sender til nullvektoren.

Lineærtransformasjoner gitt ved matriser

Vi husker fra innledningen at en $m \times n$-matrise A gir oss en lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Eksempel 8.10. La A være 3×2-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix},$$

og definer en lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ved

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Det å spesifisere T på denne måten gjør at vi kan besvare spørsmål om T ved å benytte regneteknikkene vi kjenner for matriser.

For eksempel kan vi regne ut $T(\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right])$ slik:

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Og om vi ønsker å se om det finnes vektorer $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$ slik at

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix},$$

løser vi ligningssystemet:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

på vanlig måte med gausseliminasjon. Svaret blir ja, det finnes nøyaktig en slik $\mathbf{x}$, nemlig

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Som vi så i eksempelet, kan vi alltid få til å besvare spørsmål av typen «hva er $T(\mathbf{v})$?» og «finnes det noen $\mathbf{x}$ slik at $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$?» når lineærtransformasjonen T er definert ved en matrise A. Vi kan også bruke matrisen til å regne ut kjernen og bildet til T.

Kjernen $\ker T$ er definert som mengden av alle vektorer $\mathbf{v}$ slik at $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Men når $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x}$, blir dette det samme som mengden av alle vektorer $\mathbf{v}$ slik at $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, og det er nullrommet til A. Vi får altså at $\ker T = \operatorname{Null} A$.

Bildet $\operatorname{im} T$ er alle vektorer som kan skrives som $T(\mathbf{v})$. Når $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, blir dette det samme som alle vektorer som kan skrives som $A\mathbf{v}$. Det er det samme som alle lineærkombinasjoner av kolonnene i A, altså kolonnerommet til A. Vi får altså at $\operatorname{im} T = \operatorname{Col} A$.

Vi oppsummerer det vi har vist nå i et teorem.

Teorem 8.11. *La A være en $m \times n$-matrise, og la $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Da er*

$$\ker T = \operatorname{Null} A \qquad \textit{og} \qquad \operatorname{im} T = \operatorname{Col} A.$$

Det er altså mange grunner til at det er fordelaktig å ha lineærtransformasjonene våre gitt ved matriser. Hvis vi har en lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som ikke er gitt ved en matrise, kan det derfor være nyttig å prøve å finne en matrise A slik at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle vektorer $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$. I det neste eksempelet gjør vi nettopp dette.

Eksempel 8.12. La $\mathbf{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ og $\mathbf{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ være enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$, og la $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være en lineærtransformasjon slik at

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basert på dette kan vi finne ut hva $T(\mathbf{x})$ er for en vilkårlig vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$. Vi kan nemlig skrive

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2,$$

og da får vi:

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) &= x_1 \cdot T(\mathbf{e}_1) + x_2 \cdot T(\mathbf{e}_2) \\
&= x_1 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Her har vi endt opp med å skrive lineærtransformasjonen ved hjelp av en matrise. La A være denne matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Da har vi altså at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle vektorer $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$. △

På samme måte som i dette eksempelet kan vi skrive enhver lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ på matriseform ved å lage en matrise av vektorene som T sender enhetsvektorene i $\mathbb{R}^n$ til. Vi beskriver det generelle tilfellet i et teorem.

Teorem 8.13. *La $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon. Da er*

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \textit{for alle } \mathbf{x} \textit{ i } \mathbb{R}^n,$$

der A er $m \times n$-matrisen gitt ved

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix},$$

hvor $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ er standardbasisen for $\mathbb{R}^n$.

Definisjon. Matrisen A i teorem 8.13 kalles *standardmatrisen* til lineærtransformasjonen T. △

> Oppgave: La $R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ igjen være lineærtransformasjonen som roterer planet med vinkelen θ. Finn standardmatrisen til R_θ.

Vi kan bruke standardmatrisen også for å sjekke om en lineærtransformasjon er injektiv eller surjektiv.

Teorem 8.14. *La $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon og la A være standardmatrisen til T. Da vet vi:*

1. *T er surjektiv hvis og bare hvis kolonnene i A utspenner hele $\mathbb{R}^m$.*
2. *T er injektiv hvis og bare hvis kolonnene i A er lineært uavhengige.*

> Spørsmål: La T være som i teoremet. Hvis T er både injektiv og surjektiv, hva vet vi da om m og n?

Merk. Sammenhengen mellom lineærtransformasjoner og matriser forklarer også hvorfor matrisemultiplikasjon er definert som den er. For hvis A er standardmatrisen til en lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ og B er standardmatrisen til en lineærtransformasjon $S\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Standardmatisen til komposisjonen til S og T, dvs til lineærtransformasjonen $T \circ S\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, er da matrisen $A \cdot B$. △

Lineærtransformasjoner og basiser

Faktisk kan vi gjøre teorem 8.13 mer generelt. Så lenge vektorrommene våre er endeligdimensjonale, kan enhver lineærtransformasjon beskrives ved en matrise. Men det krever at vi *velger en basis* for hvert vektorrom.

Teorem 8.15. *La V og W være endeligdimensjonale vektorrom, og la $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være basiser for henholdsvis V og W. La $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon. Da finnes en matrise A slik at*

$$[\,T(\mathbf{x})\,]_{\mathscr{C}} = A \cdot [\,\mathbf{x}\,]_{\mathscr{B}}$$

for alle vektorer $\mathbf{x}$ i V.

Egentlig er det et valg av basis involvert i teorem 8.13 også. Der har vi valgt å bruke standardbasisene for $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$. For et vilkårlig vektorrom V har vi ikke nødvendigvis noen slik basis som er det åpenbare valget.

Vi kan også bruke teorem 8.15 til å beskrive hvordan koordinatene endrer seg når vi skifter basiser. Vi bruker da teoremet på identitesfunksjonen. Altså $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Teorem 8.16. *La V være et n-dimensjonalt vektorrom, og la $\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ og $\mathscr{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$ være to basiser for V. Da finnes en $n \times n$-matrise A slik at*

$$[\,\mathbf{x}\,]_{\mathscr{C}} = A \cdot [\,\mathbf{x}\,]_{\mathscr{B}}$$

for alle vektorer $\mathbf{x}$ i V.

Kolonnene i A er $\mathscr{C}$-koordinatvektorene til basisvektorene i $\mathscr{B}$:

$$A = \big[[\,\mathbf{b}_1\,]_{\mathscr{C}}\,[\,\mathbf{b}_2\,]_{\mathscr{C}}\,\ldots\,[\,\mathbf{b}_n\,]_{\mathscr{C}}\big].$$

Eksempel 8.17. La V være $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{C} = \mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ være standardbasisen og $\mathscr{B}$ være basisen

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Vektorene $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ er koordinatene i standardbasisen. Det betyr at matrisen A fra teomeret er bare

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vektoren $\mathbf{v}$ med koordinatene med hensyn på $\mathscr{B}$ gitt ved $[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ har standardkordinatene

$$[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{E}} = A \cdot [\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

For å gå fra koordinatene med hensyn på $\mathscr{B}$ til koordinatene med hensyn på standardbasisen $\mathscr{E}$ må vi bruke den inverse matrisen til A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Da får vi

$$[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}} = A^{-1} \cdot [\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{E}} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

△

Eksempel 8.18. La V igjen være $\mathbb{R}^2$, men denne gangen ser vi på to basiser som ikke er standardbasisen. Så la $\mathscr{B}$ være basisen

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \left(\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

og la $\mathscr{C}$ være basisen

$$\mathscr{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}\right).$$

Vi vil finne matrisen A som beskriver overgangen fra basis $\mathscr{B}$ til $\mathscr{C}$.

Vi vet fra teoremet at kolonnene i matrisen A er gitt ved koordinatene til $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ med hensyn på basisen $\mathscr{C}$. For å finne koordinatene skriver vi 2×2-matrisen som består av kolonnevektorene $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ på venstre og 2×2-matrisen som består av kolonnevektorene $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ på høyre. Så gausseliminerer vi matrisen på venstre til enhetsmatrisen og utfører de samme radoperasjonene på matrisen på høyre. Resultaten på høyre blir matrise A:

$$\begin{aligned}
\big[\mathbf{c}_1\,\mathbf{c}_2\,|\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2\big] &\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -9 & -5 \\ -4 & -5 & | & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -9 & -5 \\ 0 & 7 & | & -35 & -21 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -9 & -5 \\ 0 & 1 & | & -5 & -3 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 6 & 4 \\ 0 & 1 & | & -5 & -3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Altså er koordinatene $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ med hensyn på basisen $\mathscr{C}$ gitt ved

$$[\,\mathbf{b}_1\,]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ og } [\,\mathbf{b}_2\,]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Matrisen A som beskriver basisskiftet fra $\mathscr{B}$ til $\mathscr{C}$ er

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Basisskiftet fra $\mathscr{C}$ til $\mathscr{B}$ er gitt ved inversen til A:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

△

Isomorfi

Til slutt i dette kapitlet ser vi på hvordan vi kan bruke lineærtransformasjoner til å beskrive at to vektorrom er «strukturelt like». Med dette mener vi at de oppfører seg på akkurat samme måte som vektorrom, selv om de kan bestå av helt forskjellige elementer. Da vil vi si at de to vektorrommene er *isomorfe*. For å kunne definere dette, trenger vi først et begrep om inverser for lineærtransformasjoner.

Definisjon. La $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon. En *invers* til T er en lineærtransformasjon $S\colon W \to V$ som er slik at

$$\begin{aligned} S(T(\mathbf{v})) &= \mathbf{v} \qquad \text{for alle } \mathbf{v} \text{ i } V\text{, og} \\ T(S(\mathbf{w})) &= \mathbf{w} \qquad \text{for alle } \mathbf{w} \text{ i } W. \end{aligned}$$

△

Vi vil si at to vektorrom er isomorfe hvis det er mulig å bevege seg frem og tilbake mellom dem ved hjelp av lineærtransformasjoner som bevarer all informasjonen om vektorrommene. Vi vil altså ha en situasjon slik som dette, der T og S er hverandres inverser:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "T"] & W \arrow[l, bend left, "S"] \end{tikzcd}$$

Definisjon. Hvis $T\colon V \to W$ er en lineærtransformasjon som har en invers, så er T en *isomorfi*. Da sier vi dessuten at vektorrommene V og W er *isomorfe*, og vi skriver $V \cong W$. △

En konkret måte på å sjekke om en lineærtransformasjon er en isomorfi er ved hjelp av injektivitet og surjektivitet.

Teorem 8.19. *En lineærtransformasjon er en isomorfi hvis og bare hvis den er både injektiv og surjektiv.*

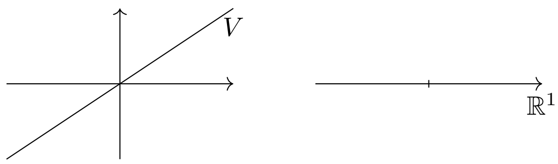
Eksempel 8.20. Vi lar V være underrommet

$$V = \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

i $\mathbb{R}^2$ utspent av vektoren $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$. Da er V et endimensjonalt vektorrom, og geometrisk sett er det en linje. Vektorrommet V ser ut og oppfører seg akkurat som vektorrommet $\mathbb{R}^1$. Forskjellen er bare at elementene ser forskjellige ut. Hvert element i V er en vektor på formen

$$\begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix}$$

mens hvert element i $\mathbb{R}^1$ er bare et tall.



De to vektorrommene V og $\mathbb{R}^1$

Det at V og $\mathbb{R}^1$ «ser like ut» kan vi gjøre mer presist ved å vise at de er isomorfe. Vi definerer lineærtransformasjoner

$$T\colon V \to \mathbb{R}^1 \quad \text{og} \quad S\colon \mathbb{R}^1 \to V$$

ved:

$$T\left(\begin{bmatrix}3t\\2t\end{bmatrix}\right)=t \qquad S(x)=\begin{bmatrix}3x\\2x\end{bmatrix}$$

Vi kan lett sjekke at disse faktisk er lineærtransformasjoner, og vi ser at de er hverandres inverser. Det betyr at de er isomorfier, og de viser dermed at $V \cong \mathbb{R}^1$. △

Eksempel 8.21. Vi husker at $\mathcal{P}_1$ er vektorrommet som består av alle polynomer av grad 1 eller lavere, altså alle polynomer på formen

$$p(x) = a_1 x + a_0.$$

Polynomet p er entydig bestemt av de to tallene a_1 og a_0, og vi vet at addisjon og skalarmultiplikasjon av polynomer foregår ved å addere eller skalarmultiplisere hver koeffisient. Hvis vi bare ser på hva som skjer med koeffisientene, så ligner altså vektorrommet $\mathcal{P}_1$ veldig på $\mathbb{C}^2$.

Vi definerer to lineærtransformasjoner

$$T\colon \mathcal{P}_1 \to \mathbb{C}^2 \quad \text{og} \quad S\colon \mathbb{C}^2 \to \mathcal{P}_1$$

på følgende måte:

$$T(p) = \begin{bmatrix}a_1\\a_0\end{bmatrix} \qquad \text{for et polynom } p \text{ definert ved } p(x) = a_1x + a_0,$$

$$S\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right) = q, \qquad \text{der } q \text{ er polynomet definert ved } q(x) = v_1x + v_2.$$

Det er lett å sjekke at T og S er lineærtransformasjoner, og at de er hverandres inverser. Dermed er de isomorfier, og vi får at $\mathcal{P}_1 \cong \mathbb{C}^2$. △

I dette eksempelet viste vi at det todimensjonale komplekse vektorrommet $\mathcal{P}_1$ er isomorft med $\mathbb{C}^2$. På tilsvarende måte kan vi vise at ethvert todimensjonalt komplekst vektorrom er isomorft med $\mathbb{C}^2$, og mer generelt at ethvert n-dimensjonalt komplekst vektorrom er isomorft med $\mathbb{C}^n$.

Teorem 8.22. *Hvis V er n-dimensjonalt komplekst vektorrom, så er V isomorft med $\mathbb{C}^n$. Og hvis W er n-dimensjonalt reelt vektorrom, så er W isomorft med $\mathbb{R}^n$.*

Faktisk er det å finne en isomorfi T mellom $\mathbb{C}^n$ og V det samme som å velge en basis for V. For hvis vi har en isomorfi $T\colon \mathbb{C}^n \to V$, så er $(T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n))$ en basis for V. Omvendt hvis vi har en basis $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ for V, så kan vi definere en lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ ved å sende $\mathbf{e}_1$ til $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{e}_2$ til $\mathbf{b}_2$, ..., e_n til $\mathbf{b}_n$. Lineærtransformasjonen T er dermed fullstendig bestemt.