Kapittel 3

Vektorligninger

Vi skal nå bruke enkel vektorregning til å analysere lineære ligningssystemer. Vi skal ha et spesielt fokus på $\mathbb{R}^3$, fordi det går an å visualisere; klarer man det, går det lettere å abstrahere til $\mathbb{R}^n$. Vi skal også abstrahere til $\mathbb{C}^n$, som er rommet av alle vektorer med komplekse koeffisienter.

NB: Husk at vi tenker på $\mathbb{R}$ som en delmengde av $\mathbb{C}$. Så når vi snakker om *komplekse tall og vektorer*, betyr ikke det at de reelle tallene er utelukket. For eksempel er vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1+2i \end{bmatrix}$ en vektor i $\mathbb{C}^3$, og vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ kan vi tenke på som en vektor både i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}^2$.

Vektorregning

Inntil videre tenker vi på vektorer som kolonnevektorer (kalles også søylevektorer):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Dersom komponentene er reelle, kan vi tenke på dette som et punkt i $\mathbb{R}^m$, og er de komplekse, tenker vi at det er et punkt i $\mathbb{C}^m$. De to viktigste regnereglene for vektorer er skalarmultiplikasjon

$$a\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_m \end{bmatrix}$$

og vektoraddisjon

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_m+y_m \end{bmatrix}.$$

En vektor på formen

$$a\mathbf{x}+b\mathbf{y} = a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1+by_1 \\ ax_2+by_2 \\ \vdots \\ ax_m+by_m \end{bmatrix}$$

sies å være en *lineærkombinasjon* av vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$. Skalarene a og b kalles vekter, og de kan være reelle eller komplekse, alt etter om vi opererer i $\mathbb{R}^m$ eller $\mathbb{C}^m$. Inntil videre skal vi begrense oss til å gange reelle vektorer med reelle skalarer, og komplekse vektorer med komplekse skalarer.

Har vi n vektorer $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, sies en vektor på formen

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n$$

å være en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{x}_i$, med vekter a_i.

Hvis vi har n vektorer $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ i $\mathbb{R}^m$ eller $\mathbb{C}^m$, definerer vi *det lineære spennet*, eller

$$\mathrm{Sp}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$$

som delmengden av $\mathbb{R}^m$ eller $\mathbb{C}^m$ bestående av alle vektorer på formen

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n,$$

altså alle lineærkombinasjoner av vektorene.

Eksempel 3.1. Vi starter med et eksempel i $\mathbb{R}^3$. Vi har

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Altså er vektoren $\begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 21 \end{bmatrix}$ en lineærkombinasjon av vektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Spennet til vektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ er alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ på formen

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

der a og b er reelle tall. △

Eksempel 3.2. Vi fortsetter med et eksempel i $\mathbb{C}^n$. Spennet til vektorene $\begin{bmatrix} i \\ 1-2i \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2+i \\ 5i \\ -6 \end{bmatrix}$ er alle vektorer i $\mathbb{C}^3$ på formen

$$a\begin{bmatrix} i \\ 1-2i \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2+i \\ 5i \\ -6 \end{bmatrix},$$

der a og b er komplekse tall. For eksempel er $\begin{bmatrix}5+3i\\8-4i\\-3+6i\end{bmatrix}$ i dette spennet, siden

$$3\begin{bmatrix}i\\1-2i\\3\end{bmatrix}+(2-i)\begin{bmatrix}2+i\\5i\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+3i\\8-4i\\-3+6i\end{bmatrix}$$

△

Spennet til en samling vektorer er altså en *mengde*. Vi skal se at spennet til en samling vektorer er et viktig eksempel på det vi vil kalle *vektorrom* i et senere kapittel.

I $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ kan slike mengder lett visualiseres.

Eksempel 3.3. (a) Spennet til mengden $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ er x-aksen i xy-planet.

(b) Spennet til mengden $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$ (eller xyz-rommet) er alle vektorer på formen

$$\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

for alle verdier av a og b. Dette er altså hele xy-planet. △

Oppgaver

Beskriv geometrisk det lineære spennet til mengdene:

1) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^2$

2) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

3) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^2$

4) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

5) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

6) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

Diskusjon av oppgavene

1) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^2$

Dette blir linja $y=x$ i $\mathbb{R}^2$. En parametrisering av punktene på denne linja er gitt ved $\{\begin{bmatrix}t\\t\end{bmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\}=\{t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\}=\text{Sp}\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\}$.

2) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

Dette blir linja gitt ved $y=x$ i xy-planet i $\mathbb{R}^3$. Merk at du kan tenke på denne linja som skjæringspunktene mellom planene i $\mathbb{R}^3$ beskrevet av ligningne $x-y=0$ og $z=0$ (altså et ligningssett med to ligninger og tre ukjente). En parametrisering av punktene på denne linja er gitt ved

$$\{\begin{bmatrix}t\\t\\0\end{bmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\}=\{t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\}=\text{Sp}\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\}.$$

3) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^2$

Spennet blir hele $\mathbb{R}^2$. La $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^2$. Da er

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+(y-x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Altså er *alle* vektorer i $\mathbb{R}^2$ i spennet til vektorene $\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$.

Legg merke til at $\mathbb{R}^2$ også er utspent av for eksempel $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Altså er $\text{Sp}\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}=\text{Sp}\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$.

4) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

Merk først at alle lineær-kombinasjoner av de to vektorene

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\a+b\\0\end{bmatrix}$$

ligger i xy-planet, siden den tredje koodinaten alltid er 0.

Vi kan utvide ligningen fra forrige eksempel, og skrive:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+(y-x)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Spennet blir altså hele xy-planet i $\mathbb{R}^3$.

5) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

Spennet blir det samme som i punkt 4), altså hele xy-planet i $\mathbb{R}^3$. Merk først at alle lineær-kombinasjoner av de tre vektorene

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c\\a+b\\0\end{bmatrix}$$

ligger i xy-planet. Av samme grunn som i 3) og 4) kan *alle* vektorene i xy-planet skrives som lineærkombinasjon av disse tre, siden vi kan skrive

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (y-x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Legg merke til at i dette tilfellet kan vi også velge andre vekter, vi kan for eksempel skrive

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^3$

Disse tre vektorene utspenner *hele* $\mathbb{R}^3$, siden vi kan skrive en vilkårlig vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$ som en lienærkombinasjon

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (y-x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorligninger

Det meste av lineær algebra dreier seg om vektorer, og problemer som kan formuleres ved hjelp av vektorer. Vi har allerede sett at lineære ligningssystemer kan formuleres ved hjelp av vektorer. Ligningssystemet fra forrige kapittel

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ x + 5y + 9z = 33 \\ 2x + 5y - \ \ z = 0 \end{cases}$$

kan skrives som en *vektorligning* i $\mathbb{R}^3$:

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 33 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir oss en ny måte å se ligningssystemer på: oppgaven er å finne vektene x, y og z slik at kolonnene i matrisen lineærkombineres til å bli lik høyresiden.

Eksempel 3.4. Systemet over har nøyaktig én løsning, nemlig

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

og du kan sjekke at

$$7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 33 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Eksempel 3.5. I forrige kapittel løste vi systemet

$$\begin{aligned} (1-i)z + 3w &= 2 - 3i \\ iz + (1+2i)w &= 1 \end{aligned}$$

og fant at $z = 1 + i$. og $w = -i$. Du kan sjekke at

$$(1+i) \begin{bmatrix} 1-i \\ i \end{bmatrix} + (-i) \begin{bmatrix} 3 \\ 1+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Geometrisk tolkning av vektorligninger: Eksistens og entydighet av løsninger

Ligningssystemer deler seg naturlig i tre kategorier; de som har en unik løsning, de som har ingen løsning, og de som har uendelig mange løsninger. Vi skal nå gi noen geometriske illustrasjoner i $\mathbb{R}^3$ av hva som skjer i de forskjellige tilfellene.

Eksempel 3.6. Vektorligningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

har uendelig mange løsninger. Den utvidete matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som har redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Velger vi $z = t$ som fri variabel, får vi generell løsning

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Her er geometrisk forklaring: Siden de tre vektorene

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

alle ligger i samme plan (i dette tilfellet xy-planet), og $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ også ligger i det samme planet, er det uendelig mange måter å løse vektorligningen på. $\triangle$

Eksempel 3.7. Vektorligningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har ingen løsninger. Den utvidete matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vi ser at den tredje raden tilsvarer den uløselige ligningen $0 = 1$. Vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger ikke i xy-planet, altså den er ikke i

$$\mathrm{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

og følgelig har ligningssystemet ingen løsning. $\triangle$

Eksempel 3.8. Vektorligningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har nøyaktig en løsning. Den utvidete matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

som har redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Den unike løsningen er altså

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det lineære spennet

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er hele $\mathbb{R}^3$. Enhver vektor i $\mathbb{R}^3$ kan utspennes av disse tre på nøyaktig én måte. Det betyr altså at en ligning

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

har nøyaktig én løsning, uansett hvilken vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vi har til høyre for likhetstegnet. △

Vi sniker inn et eksempel i $\mathbb{C}^3$ også. Det er viktig å forstå at lineær algebra fungerer omtrent likt i $\mathbb{C}^n$ som i $\mathbb{R}^n$, det er bare vanskeligere å visualisere.

Eksempel 3.9. Vektorligningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}$$

har nøyaktig én kompleks løsning. Den utvidete matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & i \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 1 & 2-i \end{array}\right]$$

som har redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-i \end{array}\right]$$

Den unike løsningen er altså

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2-i \end{bmatrix}$$

Det lineære spennet

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er hele $\mathbb{C}^3$, og enhver vektor i $\mathbb{C}^3$ kan utspennes av disse tre på nøyaktig én måte. △

I de to siste eksemplene har vi uttalt tilsynelatende motstridende utsagn som at det lineære spennet

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er både hele $\mathbb{R}^3$ og hele $\mathbb{C}^3$. Begge deler er riktig, for det kommer an på om man tillater vekter fra $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Dette skal vi komme tilbake til senere i emnet.