Kapittel 14

Andre ordens lineære differensialligninger

I dette kapitlet skal vi bruke det vi har lært om systemer av differensialligninger og dermed det vi har lært om egenverdier, egenvektorer og diagonalisering til å løse andre ordens differensialligninger.

I Matematikk 1 har vi løst to typer differensialligninger. Den ene er den første ordens ligningen

$$y'(t) + f(t)y(t) = g(t)$$

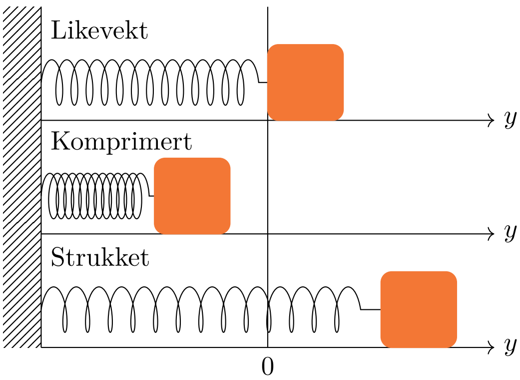
og den andre er den separable ligningen

$$y'(t) = f(y)g(t).$$

I dette kapitlet skal vi behandle lineære andreordens differensialligninger med konstante koeffisienter:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t).$$

Hvor kommer andre ordens differensialligninger fra?



En kloss sklir friksjonsfritt på et underlag, og er festet til veggen med en fjær. Hookes fjærlov sier at

$$F(y) = -ky,$$

der y er hvor langt fjæren er strukket eller komprimert, k er en konstant som avhenger av fjærens stivhet, og $F(y)$ er kraften fra fjæren på klossen. Dersom $y(t)$ er klossens posisjon, er klossens akselerasjon gitt ved $y''(t)$, og Newtons andre lov blir

$$-ky = my'',$$

der m er klossens masse. Dette er en differensialligning. Vi skriver vanligvis

$$my'' + ky = 0.$$

Vi kan komplisere det litt til. La oss innføre luftmotstand. Luftmotstand avhenger kvadratisk av farten:

$$F(y') = b(y')^2;$$

der b er en proporsjonalitetskonstant som sier noe om luftmotstanden. Den totale kraften blir

$$F(y, y') = -ky + b(y')^2,$$

slik at Newtons andre lov gir

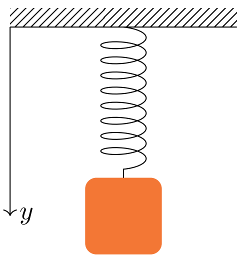
$$my'' - b(y')^2 + ky = 0.$$

Denne ligningen har et problematisk ledd, $b(y')^2$. Men vi kan gjøre en forenkling. Dersom klossen ligger i en tyktflytende væske, blir motstanden proporsjonal med farten istedet for kvadratet av farten, og vi får ligningen

$$my'' - cy' + ky = 0,$$

som er mye enklere å løse.

Nå skal vi komplisere det enda litt. La klossen henge fra taket.



Nå vil også gravitasjonen påvirke bevegelsen. Gravitasjonskraften er en konstant kraft mg nedover. Den totale kraften er

$$F(y, y') = -ky + by' - mg,$$

og Newtons andre lov gir differensialligningen

$$my'' - by' + ky = mg.$$

Noen forberedelser

Vi skal behandle *andre ordens differensialligninger med konstante koeffisienter*:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Det er vanlig å kreve at y er en funksjon som er to ganger kontinuerlig deriverbar. Vi skal også anta at $y(t)$ er definert for alle reelle tall, men det er ikke nødvendig for analysen og for mange praktiske anvendelser er ligningene kun gyldig på et lite intervall. Antagelsene gjør det rett og slett lettere å skrive ned analysen. Vi noterer det som $y(t) \in V = \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Vi husker at mengden V utgjør et reelt vektorrom.

Vi skal alltid anta at a_2 og a_0 ikke er null. For ellers kan problemet reduseres til en første ordens differensialligning: dersom $a_2 = 0$, så har vi bare $a_1 y'(t) + a_0 y(t)$ på den venstre siden som vi allerede kan løse; og dersom $a_0 = 0$, så holder det å løse ligningene $x'(t) + a_1 x(t) = f(t)$ for $x(t)$ og $x(t) = y'(t)$ for å finne $y(t)$. (Vi holder denne observasjonen i bakhodet fordi den skal gi oss en hint på hvordan vi løser en generell ligning.)

Det er vanlig å sette $a_2 = 1$, for å forenkle formler og analysen. Dersom vi møter en ligning med $a_2 \neq 1$ (og $a_2 \neq 0$), kan vi alltid dele alle leddene på a_2 for å komme tilbake til situasjonen med $a_2 = 1$. Vi slipper dermed å ha med a_2 i alle formler og utledninger, og vi slipper å luke ut $a_2 = 0$ hver gang vi skal sette opp et teorem.

Akkurat som for ligningssystemer vi så på tidlig i semesteret sorterer vi differensialligninger i to kategorier, de *homogene*

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

der den høyre siden er konstant null og de *inhomogene*

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

der $f(t)$ kan være en kontinuerlig funksjon forskjellig fra 0.

Løsningsmengden for homogene ligninger er et vektorrom

Siden derivasjon er en lineær operasjon får vi et resultat som ofte kalles *superposisjonsprinsippet.*

Teorem 14.1 (Superposisjonsprinsipp)**.** *Løsningene til*

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

utgjør et reelt vektorrom. Det vil si at dersom $y_1(t)$ og $y_2(t)$ er løsninger, så er $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ en løsning for alle reelle tall c_1 og c_2.

Bevis. Vi viser at løsningene utgjør et underrom av vektorrommet av alle to ganger kontinuerlig deriverbare funksjoner. La $y_1(t)$ og $y_2(t)$ være to løsninger. Ønsket er at en vilkårlig lineærkombinasjon $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ er en løsning igjen:

$$\begin{aligned}&(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t))'' \\ =&c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t) \text{ fordi derivasjon er lineær}\end{aligned}$$

nå bruker vi at både $y_1(t)$ og $y_2(t)$ er løsninger:

$$\begin{aligned}&= c_1(-a_1 y_1'(t) - a_0 y_1(t)) + c_2(-a_1 y_2'(t) - a_0 y_2(t)) \\ &= - a_1 (c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t))' - a_0 (c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)).\end{aligned}$$

Funksjonen $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ er altså også en løsning som vi hevdet. □

Løsningsteknikk for homogene ligninger

Vi skriver $y_h(t)$ for en løsning av

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{14.1}$$

der h-en står for *homogen.* Idéen for å løse en slik andre ordens differensialligning er å transformere den til et system av to første ordens differensialligninger: Vi innfører de nye funksjonene

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= y'(t).\end{aligned}$$

Vi kan nå oversette (14.1) i to ligninger:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t).\end{aligned}$$

Disse to ligningene sammen kan vi skrive som én vektorligning

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \tag{14.2}$$

Dette er et *system av differensialligninger* som vi har studert i forrige kapitlet. Vi husker at for å løse systemet, må vi finne egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

En slik egenverdi er en løsning λ til ligningen

$$0 = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{bmatrix}\right)$$

dvs en egenverdi λ er en løsning til

$$0 = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0. \tag{14.3}$$

La oss anta at λ er en slik egenverdi. Da hevder vi at vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

er en egenvektor med egenverdi λ. Vi sjekker dette:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda \\ -a_0 - a_1\lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix} \text{ fordi } \lambda \text{ løser (14.3)} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Vi vet altså at vektorfunksjonen

$$e^{\lambda t} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

løser systemet (14.2). Dette viser at funksjonen

$$y(t) = x_1(t) = e^{\lambda t}$$

er en løsning til (14.1).

Vi er interessert i *reelle* løsninger til (14.1). Vi kan bruke analysen fra forrige kapitlet for å se at vi burde skille mellom tre forskjellige typer egenverdier:

- Dersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er to reelle løsninger til (14.3), er den generelle løsningen til (14.1) på formen

  $$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

  for reelle tall c_1 og c_2.

- Dersom $\lambda = a + bi$ med $b \neq 0$, gir oss realdelen til den første komponenten en løsning. Dermed er den generelle løsningen til (14.1) på formen

  $$y_h(t) = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt)$$

  for reelle tall c_1 og c_2.

- Dersom det finnes kun én reell egenverdi λ, gir oss $y(t) = e^{\lambda t}$ kun én type løsning. Dette skjer hvis og bare hvis $4a_0 = a_1^2$ og dermed $\lambda = -a_1/2$. For å finne flere løsninger kan vi enten finne en generalisert egenvektor som i forrige kapitlet eller vi kan bruke et annet triks: Vi beregner

  $$(y(t)e^{-\lambda t})'' = e^{-\lambda t}(y''(t) - 2\lambda y'(t) + \lambda^2 y(t))$$

  og setter inn $\lambda = -a_1/2$ og $\lambda^2 = a_0$:

  $$(y(t)e^{-\lambda t})'' = e^{\lambda t}(y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t)) = 0$$

  der det står 0 på høyre siden fordi $y(t)$ oppfyller (14.1). Vi får altså

  $$y(t)e^{-\lambda t} = c_1 t + c_0$$

  med konstanter c_0 og c_1. Nå ganger vi begge sider med $e^{\lambda t} \neq 0$ og ser at den generelle løsningen til (14.1) er på formen

  $$y_h(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_0 e^{\lambda t}.$$

  Fordi løsningsmengden til systemet av difflignigner er to-dimensjonal, vet vi at løsningsmengden til (14.1) også er to-dimensjonal. Dermed har vi funnet alle løsninger.

Vi oppsummerer diskusjonen i et teorem.

Teorem 14.2. *Løsningsmengden til*

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

er et to-dimensjonalt *reelt vektorrom som utspennes av de lineært uavhengige funksjonene*

- $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ *og* $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ *dersom* $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ *har to reelle løsninger* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*;*
- $y_1(t) = e^{at}\cos(bt)$ *og* $y_2(t) = e^{at}\sin(bt)$ *dersom* $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ *har en kompleks løsning* $\lambda = a + bi$ *med* $b \neq 0$*;*
- $y_1(t) = te^{\lambda t}$ *og* $y_2(t) = e^{\lambda t}$ *dersom* $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ *har kun én reell løsning* λ.

Eksempler på homogene ligninger

Vi ser på noen eksempler.

Eksempel 14.3. Vi ser på ligningen

$$y(t)'' - y(t) = 0.$$

Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 - 1 = 0$ som løses av $\lambda = 1$ og $\lambda = -1$. Den generelle løsningen til differensialligningen er defor

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \qquad \triangle$$

Eksempel 14.4. Vi ser på ligningen

$$y(t)'' + y(t) = 0.$$

Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 + 1 = 0$ som ikke har noen reelle løsninger. Men den løses av de to komplekse tallene $\lambda = i$ og $\overline{\lambda} = -i$. Vi har altså $a = 0$ og $b = 1$ og den generelle løsningen til differensialligningen er på formen

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t. \qquad \triangle$$

Eksempel 14.5. Vi ser på ligningen

$$y(t)'' + 2y(t)' + y(t) = 0.$$

Den karakteristiske ligningen er

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

som kun har løsningen $\lambda = -1$. Da er den generelle løsningen på formen

$$y(t) = c_1 te^{-t} + c_0 e^{-t}. \qquad \triangle$$

Løsningsteknikk for inhomogene ligninger

Vi skal nå se på inhomogene ligninger, dvs andre ordens differensiallligniner på formen

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \tag{14.4}$$

der $f(t)$ er en kontinuerlig funksjon som ikke trenger å være konstant null. Vi skriver $y_p(t)$ for en løsning til (14.4) der p står for partikulær.

Anta at vi har funnet en slik løsning $y_p(t)$. Dersom $y(t)$ er en annen løsning til (14.4), er $y(t) - y_p(t)$ en homogen løsning, dvs en løsning til den tilsvarende homogene ligningen

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Teorem 14.6. *Alle løsninger til den inhomogene ligningen er på formen*

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

der $y_p(t)$ *er en partikulær løsning og* $y_h(t)$ *er en løsning til den tilsvarende homogene ligningen.*

Teoremet gir oss en *strategi for å finne alle løsninger*: vi må finne én partikulær løsning og så får vi alle løsninger ved å legge til løsningene til den tilsvarende homogene ligningen.

For å finne en partikulær løsning kan vi bruke den følgende formelen: La $y_1(t)$ og $y_2(t)$ være to *lineært uavhengige* løsninger til den homogene ligningen. Det kan vises at partikulærløsningen kan skrives som

$$\begin{aligned} y_p(t) = y_2(t) &\int \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\, dt \\ - y_1(t) &\int \frac{y_2(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\, dt. \end{aligned}$$

Vi ser på noen eksempler:

Eksempel 14.7. Den homogene løsningen til

$$y''(t) - y(t) = e^{2t}$$

er

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} = c_1 y_1(t) + c_1 y_2(t).$$

Vi setter inn i formelen for en partikulær løsning og får

$$\begin{aligned} y_p(t) = y_2(t) &\int \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\, dt \\ - y_1(t) &\int \frac{y_2(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\, dt \\ = e^{-t} &\int \frac{e^t e^{2t}}{-e^t e^{-t} - e^{-t} e^t}\, dt \\ - e^t &\int \frac{e^{-t} e^{2t}}{-e^t e^{-t} - e^{-t} e^t}\, dt = \frac{1}{3} e^{2t}. \end{aligned}$$

Den generelle løsningen på den inhomogene ligningen er dermed

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}. \qquad \triangle$$

Eksempel 14.8. Den homogene løsningen til

$$y''(t) - y(t) = e^t$$

er på formen

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Vår formel for en partikulær løsning gir oss

$$\begin{aligned} y_p(t) = e^{-t} &\int \frac{e^t e^t}{-e^t e^{-t} - e^{-t} e^t}\, dt \\ - e^t &\int \frac{e^{-t} e^t}{-e^t e^{-t} - e^{-t} e^t}\, dt = \frac{1}{2}(t-1)e^t, \end{aligned}$$

og

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}(t-1)e^t. \qquad \triangle$$

Eksempel 14.9. Den homogene løsningen til

$$y''(t) + y(t) = \sin t$$

er på formen

$$y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Det betyr at vi kan finne en partikulær løsning ved

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sin t \int \frac{\cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt \\ &\quad - \cos t \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt \\ &= \sin t \int \cos t \sin t \, dt - \cos t \int \sin^2 t \, dt \\ &= -\frac{1}{4} \sin t \cos 2t - \cos t \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \\ &= -\frac{1}{2} t \cos t - \sin t. \end{aligned}$$

Leddet $\sin t$ i $y_p(t)$ er også en homogen løsning. Når vi skriver ned den generelle løsningen forsvinner det derfor i konstanten c_2:

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2} t \cos t. \qquad \triangle$$

Ofte er det ikke nødvendig å bruke den store formelen for å finne en partikulær løsning. For det ligger et mønster i bakgrunn: $f(t)$ og $y_p(t)$ er på samme form, dvs, dersom $f(t) = e^{2t}$ er $y_p(t)$ på form ce^{2t}; dersom $f(t)$ er en trigonometrisk funksjon, så er også $y_p(t)$ en trigonometrisk funksjon (eller en sum av sånne); og dersom $f(t)$ er en polynom, så er $y_p(t)$ også en polynom av samme grad.

Derfor er det ofte en rimelig framgangsmåte å gjette en partikulær løsning på denne måten. Vi prøver dette i noen eksempler.

Eksempel 14.10. La $f(t) = K \neq 0$ være en konstant. Vi ser på den inhomogene ligningen

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = K$$

med $a_0 \neq 0$. Vi prøver med en partikulær løsning $y_p(t) = c$ som også er en konstant. Vi setter inn i ligningen

$$K = y_p''(t) + a_1 y_p'(t) + a_0 y_p(t) = a_0 c.$$

Fordi $a_0 \neq 0$, får vi altså en partikulær løsning ved $y_p(t) = K/a_0$. $\triangle$

Eksempel 14.11. Vi ser på den inhomogene ligningen

$$y''(t) + y(t) = e^t.$$

Vi prøver $y_p(t) = ce^t$ med en konstant c. Når vi setter $y_p(t)$ inn i ligningen, kan vi bestemme c som i forrige eksemplet og får $c = 1/2$. $\triangle$

Eksempel 14.12. Vi ser på den inhomogene ligningen

$$y''(t) - y(t) = \cos t.$$

Vi prøver $y_p(t) = a \cos t + b \sin t$ med konstanter a og b. Legg merke til at vi må ta med både $\cos t$ og $\sin t$ selv om $f(t)$ kun består av $\cos t$. Nå setter vi $y_p(t)$ inn i ligningen:

$$\begin{aligned} \cos t &= y_p''(t) - y_p(t) \\ &= (a \cos t + b \sin t)'' - (a \cos t + b \sin t) \\ &= -a \cos t - b \sin t - a \cos t - b \sin t \\ &= -2a \cos t - 2b \sin t. \end{aligned}$$

Venstre- og høyresiden kan kun være like for alle t dersom $a = -\frac{1}{2}$ og $b = 0$. Den generelle løsningen til den inhomogene differensialligningen er altså på formen

$$y(t) = c_1 te^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.$$

△

Eksempel 14.13. Vi ser på den inhomogene ligningen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t^2 - 1.$$

Den høyre siden $f(t)$ er en polynom. Vi prøver derfor med en polynom av samme grad som $f(t)$. Vi setter $y_p(t) = at^2+bt+c$ med konstanter a, b, c. Legg merke til at vi må ta med et ledd bt selv om den ikke dukker opp i $f(t)$. Nå setter vi $y_p(t)$ inn i ligningen:

$$\begin{aligned} t^2 - 1 &= y_p''(t) + 2y_p(t) + y_p(t) \\ &= 2a + 2(2at + b) + (at^2 + bt + c) \\ &= 2a + 4at + 2b + at^2 + bt + c \\ &= at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c. \end{aligned}$$

Venstre og høyre siden kan kun være like for alle t dersom

$$\begin{aligned} 1 &= a \\ 0 &= 4a + b \\ -1 &= 2a + 2b + c. \end{aligned}$$

Vi får altså $a = 1$, $b = -4$ og $c = 5$, dvs

$$y_p(t) = t^2 - 4t + 5.$$

Den generelle løsningen til den inhomogene differensialligningen er altså på formen

$$y(t) = c_1 te^{-t} + c_2 e^{-t} + t^2 - 4t + 5.$$

△

Eksempel 14.14. Vi møter derimot et lite problem når vi prøver samme strategien med ligningen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}.$$

Det fungerer ikke å sette $y_p(t) = ce^{-t}$. Problemet oppstår fordi e^{-t} også er en løsning til den homogene ligningen. Når vi setter inn i ligningen får vi

$$\begin{aligned} y''(t) + 2y'(t) + y(t) &= (ce^{-t})'' + 2(ce^{-t})' + ce^{-t} \\ &= ce^{-t} - 2ce^{-t} + ce^{-t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vi får altså ikke noen ytterlige informasjon om løsningen på denne måten. I en slik situasjon holder det vanligvis med å kaste inn en ekstra faktor t og å prøve med $y_p(t) = cte^{-t}$. Men i dette tilfellet løser $y(t) = cte^{-t}$ også den homogene ligningen. Da kaster vi inn en faktor t til og prøver $y_p(t) = ct^2e^{-t}$:

$$\begin{aligned} e^{-t} &= y_p''(t) + 2y_p'(t) + y_p(t) \\ &= (ct^2e^{-t})'' + 2(ct^2e^{-t})' + ct^2e^{-t} \\ &= ce^{-t}(t^2 - 4t + 2 + 4t - 2t^2 + t^2) \\ &= 2ce^{-t}. \end{aligned}$$

Fordi $e^{-t} \neq 0$ for alle t, ser vi at c må være lik $1/2$. Vi får dermed $y_p(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$. Den generelle løsningen til inhomogene differensialligningen er altså på formen

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}.$$

△

Denne gjettemetoden er i stor grad basert på intuisjon, men vi kan identifisere enkelte gode tommelfingelregler her:

1. **Grunnregel:**

Hvis $f(t)$ er	**Gjett**
$p(t)$	$q(t)$
Ke^{ct}	ae^{ct}
$p(t)e^{ct}$	$q(t)e^{ct}$
$\left.\begin{matrix} K\cos(\omega t) \\ K\sin(\omega t) \end{matrix}\right\}$	$a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$
$\left.\begin{matrix} p(t)\cos(\omega t) \\ p(t)\sin(\omega t) \end{matrix}\right\}$	$q(t)\sin(\omega t) + r(t)\cos(\omega t)$
$\left.\begin{matrix} Ke^{ct}\cos(\omega t) \\ Ke^{ct}\sin(\omega t) \end{matrix}\right\}$	$e^{ct}[a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)]$

   hvor $f(t)$ er av samme grad som $q(t)$ og $r(t)$ der de opptrer,

2. **Modifikasjon:** Hvis en del av ditt gjett for $y_p(t)$ er en løsning av den homogene likningen; multipliser med t. Hvis løsningen korrepsonderer til en dobbelrot; multipliser med t^2.

3. **Summering:** Hvis $f(t)$ er en sum av funksjoner fra tabellen; velg $y_p(t)$ som en sum av de tilhørende gjettene.

Initialverdiproblem

Vi har bare sett på generelle løsninger. Vi kan også se på initialverdiproblemer - som vi gjorde for systemer av differensialligninger. Merk at det finnes to ubestemte koeffisienter i $y_h(t)$. Det betyr at et initialverdiproblem trenger to betingelser:

$$y(t_0) = a, \quad y'(t_0) = b.$$

Merk. At vi trenger to betingelser, korresponderer bra med vår løsningsidé: for et system av differensialligninger er en initialverdi gitt av en vektor med to komponenter. Tallene a og b tilsvarer de to komponentene. △

Vi kan vise at *initialverdiproblemer har en unik løsning*. Dette følger fra det tilsvarende resultatet for systemer av differensialligninger. Etter teorien ser vi på et eksempel:

Eksempel 14.15. Vi ser på initialverdiproblemet

$$y''(t) - y(t) = e^{2t}$$

med betingelser

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Vi har løst ligningen uten initialverdier. Den generelle løsningen er på formen

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}.$$

Nå vil vi finne den konkrete løsningen med riktige initialverdiene. Vi trenger altså

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 + \frac{1}{3} e^0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{3} \\ 0 &= y'(0) = c_1 e^0 - c_2 e^0 + 2\frac{1}{3} e^0 = c_1 - c_2 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dette er et lineært ligningssystem som vi kan løse for c_1 og c_2. Vi får $c_1 = 0$ og $c_2 = \frac{2}{3}$. Løsningen til initialverdiproblemet er dermed

$$y(t) = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}. \qquad \triangle$$

Merk. Det er generelt en forskjell om vi bestemmer koeffisientene for et initialverdiproblem til den homogene eller den inhomogene ligningen. For eksempel: dersom vi ser på initialverdiproblemet for den homogene ligningen

$$y''(t) - y(t) = 0$$

med betingelser

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

så finner vi $c_1 = \frac{1}{2}$ og $c_2 = \frac{1}{2}$. Løsningen er da

$$y(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t}. \qquad \triangle$$