

# Kapittel 11

## Diagonalisering

I dette kapitlet skal vi bruke det vi har lært om egenverdier og egenvektorer til å analysere matriser og deres tilsvarende lineærtransformasjoner.

**Eksempel 11.1.** Husk at en diagonalmatrise er en matrise med bare 0-ere utenom diagonalen.

Vi begynner med et eksempel og ser på diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Det er lett å multiplisere  $D$  med vektorer i  $\mathbb{R}^2$  eller  $\mathbb{C}^2$ . Men det er også enkelt å multiplisere  $D$  med seg selv. For eksempel får vi  $D^5$  ved

$$D^5 = D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D = \begin{bmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & (-5)^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 243 & 0 \\ 0 & -3125 \end{bmatrix}.$$

Hvis vi prøver det samme med  $A$ , dvs beregne  $A^5$  for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix},$$

blir det mye mer tidskrevende.

Men vi har et triks som gjør oppgaven å beregne  $A^5$  mye enklere. Vi lærte at matrisen vi bruker for å beskrive en lineærtransformasjon avhenger av basisen vi velger for vektorrommene. Altså kan vi stille spørsmålet:

Kan vi finne en basis for  $\mathbb{R}^2$  slik at lineærtransformasjonen kan beskrives av en diagonalmatrise?

Husk at en basisskifte for  $\mathbb{R}^2$  er gitt ved en inverterbar  $2 \times 2$ -matrise  $P$ .

Fordi det er mye lettere å jobbe med en diagonalmatrise, kan vi stille spørsmålet: finnes det en diagonalmatrise  $D$  og en inverterbar matrise  $P$  slik at

$$A = PDP^{-1}?$$

Da ville oppgaven å beregne  $A^5$  blitt mye enklere:

$$\begin{aligned} A^5 &= (PDP^{-1})^5 \\ &= PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \dots PDP^{-1} \\ &= PD^5P^{-1}, \end{aligned}$$

fordi  $P^{-1} \cdot P = I_2$ , og  $D^5$  er lett å beregne.

For å finne slike matriser  $D$  og  $P$  husker vi fra forrige kapittel, at  $A$  har egenverdier  $\lambda_1 = 3$  og  $\lambda_2 = -5$  med henholdsvis  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  som egenvektorer. Det betyr at vi har

$$A\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1 \text{ og } A\mathbf{v}_2 = (-5)\mathbf{v}_2.$$

En annen måte å skrive disse to ligningene er å skrive egenverdiene på diagonalen i en matrise  $D$  og så skrive egenvektorene som kolonnene i en matrise  $P$ :

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

slik at

$$AP = PD.$$

Nå observerer vi at  $P$  er inverterbar med invers

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Altså kan vi gange begge sidene av  $AP = PD$  med  $P^{-1}$  og får

$$A = PDP^{-1}.$$

Nå kan vi faktisk beregne  $A^k$  for alle  $k$  med formelen

$$A^k = PD^kP^{-1}. \quad \triangle$$

Det vi har gjort i eksempelet er å erstatte en matrise  $A$  med en diagonalmatrise  $D$ , med andre ord har vi diagonalisert  $A$ .

**Definisjon.** Vi sier at en  $n \times n$ -matrise  $A$  er *diagonaliserbar* hvis det finnes en diagonalmatrise  $D$  og en inverterbar matrise  $P$  slik at

$$A = PDP^{-1}. \quad \triangle$$

Vi sier da at  $P$  diagonaliserer  $A$ .

Ikke alle matriser er diagonaliserbare. Derfor trenger vi en metode for å sjekke om vi kan diagonalisere  $A$ . Det gir oss følgende resultat:

**Teorem 11.2.** *En  $n \times n$ -matrise  $A$  er diagonaliserbar hvis og bare hvis  $A$  har  $n$  lineært uavhengige egenvektorer.*

*Bevis.* Først antar vi at  $A$  har  $n$  lineært uavhengige egenvektorer  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  og tilhørende egenverdier  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . For hver egenvektor gjelder

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k.$$

Som i eksemplet kan vi organisere disse  $n$  ligningene i en matriseligning

$$AP = PD,$$

der

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

og

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n].$$

Siden  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  er lineært uavhengige, er  $n \times n$ -matrisen  $P$  inverterbar. Det betyr det finnes en invers  $P^{-1}$  og vi får

$$A = PDP^{-1}.$$

Med andre ord  $A$  er diagonaliserbar.

Nå antar vi at  $A$  er diagonaliserbar med  $A = PDP^{-1}$  der  $D$  er en diagonalmatrise og  $P$  er en inverterbar matrise. La  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  være kolonnene i  $P$  og  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  være tallene som står på diagonalen i  $D$ . Fra ligningen  $A = PDP^{-1}$ , får vi  $AP = PD$ , altså en likhet av matriser:

$$[A\mathbf{v}_1 \quad A\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{v}_n].$$

Det viser at

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k \text{ for alle } k.$$

Fordi  $P$  er inverterbar, må vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  være lineært uavhengige. Især er alle forskjellige fra nullvektoren. Det viser at  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  er lineært uavhengige egenvektorer for  $A$ .  $\square$

I forrige kapittel så vi at egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier alltid er lineært uavhengige. Sammen med teorem 11.2 gir det:

**Teorem 11.3.** Hvis en  $n \times n$ -matrise  $A$  har  $n$  forskjellige egenverdier, så er  $A$  diagonaliserbar.

Hvis noen av egenverdiene for  $A$  har algebraisk multiplisitet større enn 1, er det fortsatt mulig at  $A$  er diagonaliserbar. Det vi må undersøke er om det er mange nok lineært uavhengige egenvektorer allikevel.

**Teorem 11.4.** En  $n \times n$ -matrise  $A$  er diagonaliserbar hvis og bare hvis  $A$  har  $n$  egenverdier<sup>a</sup> og dimensjonen til egenrommet til hver egenverdi  $\lambda$  er lik den algebraiske multiplisiteten til  $\lambda$ .

<sup>a</sup>Ikke alle egenverdier må nødvendigvis være forskjellige fra hverandre her!

**Merk.** La  $A$  være en reell  $n \times n$ -matrise. Det er mulig at  $A$  er diagonaliserbar som en kompleks matrise, selv om den ikke er diagonaliserbar som en reell matrise. Om  $A$  kun har komplekse egenverdier, kan vi ikke finne en passende reell diagonalmatrise.  $\triangle$

Vi kan reformulere dette ved hjelp av basiser.

**Teorem 11.5.** En kompleks  $n \times n$ -matrise  $A$  er diagonaliserbar hvis og bare hvis det finnes en basis for  $\mathbb{C}^n$  som kun består av egenvektorer for  $A$ .

En reell  $n \times n$ -matrise  $A$  er diagonaliserbar som en reell matrise hvis og bare hvis det finnes en basis for  $\mathbb{R}^n$  som kun består av egenvektorer for  $A$ .

Dette resultatet motiverer følgende definisjon:

**Definisjon.** En lineærtransformasjon  $T: V \rightarrow V$  kalles *diagonaliserbar* hvis det finnes en basis for  $V$  som kun består av egenvektorer for  $T$ .  $\triangle$

Da kan vi konkludere med det følgende resultatet fra tidligere teoremer og kapitler:

**Teorem 11.6.** La  $T: V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon. Vi antar at  $T$  er diagonaliserbar og at  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  er en basis som består av  $T$  sine egenvektorer. Da er matrisen som beskriver  $T$  med hensyn på basisen  $\mathcal{B}$  en diagonalmatrise  $D$ , med egenverdiene  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  til  $T$  på diagonalen.

## Eksempler

Vi skal nå se på en rekke eksempler.

**Eksempel 11.7.** Vi har sett på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix},$$

og vet at egenverdiene for  $A$  er 2 og 4 (med algebraisk multiplisitet 2). Egenrommet til egenverdi 2 er

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Egenrommet til egenverdi 4 er

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi ser at vi har tre lineært uavhengige egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Det betyr at  $A$  er diagonaliserbar med diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

### Eksempel 11.8. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

har egenverdier

$$\lambda = \pm i$$

med egenrom  $\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  til egenverdi  $i$ , og egenrom

$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$  til egenverdi  $-i$ .

Det betyr at  $A$  er diagonaliserbar som en *kompleks* matrise med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Men vi kan ikke diagonalisere  $A$  som en *reell* matrise.  $\triangle$

### Eksempel 11.9. Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Egenverdien til  $A$  er 1 med algebraisk multiplisitet 2 fordi

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) = (1-\lambda)^2.$$

Egenrommet til 1 er nullrommet til matrisen

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det er underrommet utspent av vektoren  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Især er egenrommet endimensjonalt. Vi kan altså ikke finne to lineært uavhengige egenvektorer for  $A$ . Dette viser at  $A$  *ikke* er diagonaliserbar, hverken som reell eller kompleks matrise.  $\triangle$

**Eksempel 11.10.** Det samme argumentet viser at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*ikke* er diagonaliserbar, hverken som reell eller kompleks matrise.  $\triangle$

#### Oppgave

Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

For hvilke reelle tall  $a$  og  $b$  er  $A$  diagonaliserbar?

### Mer om komplekse egenverdier

Når en reell  $n \times n$ -matrise  $A$  har komplekse egenverdier er det ved første øyekast ikke lenger så enkelt å se geometrisk hva virkningen av  $A$  på vektorer i  $\mathbb{R}^n$  er. Vi skal nå se at det ligger ganske mye geometri i bakgrunnen likevel, i hvert fall for  $2 \times 2$ -matriser.

La  $C$  være matrisen

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

med reelle tall  $a$  og  $b \neq 0$ . Vi kan beregne egenverdiene for  $C$  eller vi kan observere at

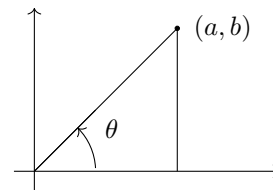
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bi \\ b + ai \end{bmatrix} = (a - bi) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Altså er  $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  en egenvektor til  $C$  med egenverdi  $\lambda = a - bi$ . Fordi  $b \neq 0$ , vet vi at  $\bar{\lambda} = a + bi$  er den andre egenverdien til  $C$  med egenvektor  $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ .

Hvis vi skriver  $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$  for lengden av vektoren  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  i  $\mathbb{R}^2$ , så kan vi skrive

$$C = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

der  $\theta$  er vinkelen mellom den positive  $x$ -aksen og linjen fra origo til punktet med koordinater  $(a, b)$ .



Å gange en vektor  $\mathbf{v}$  i  $\mathbb{R}^2$  med matrisen  $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$  tilsvarer at vi ganger vektoren med tallet  $r$ , med andre ord, vi strekker eller krymper  $\mathbf{v}$  med faktoren  $r$ . Å gange en vektor  $\mathbf{v}$  i  $\mathbb{R}^2$  med (rotasjons-)matrisen  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  tilsvarer å rotere  $\mathbf{v}$  om vinkelen  $\theta$ .

Altså har vi vist at å gange en vektor  $\mathbf{v}$  i  $\mathbb{R}^2$  med matrisen  $C$  tilsvarer å strekke og rotere  $\mathbf{v}$ .

Vi gjør altså følgende observasjon: at det å gange med matrisen  $C$  tilsvarer først en rotasjon og så en re-skalerting, faktisk også gjelder for andre matriser med komplekse egenverdier.

**Teorem 11.11.** La  $A$  være en reell  $2 \times 2$ -matrise med kompleks egenverdi  $\lambda = a - bi$ , med  $b \neq 0$ , og la  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$  være en egenvektor som hører til  $\lambda$ . Da kan vi faktorisere  $A$  på følgende måte:

$$A = PCP^{-1} \text{ med } P = [\text{Re } \mathbf{v} \quad \text{Im } \mathbf{v}]$$

og

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Teoremet sier at for å forstå virkningen av  $A$  på en vektor  $\mathbf{x}$ , kan vi skifte koordinater ved  $P^{-1}$  for å få  $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x}$ , rotere og strekke vektoren  $\mathbf{u}$  ved  $C$ , og så skifte koordinatene tilbake.

**Eksempel 11.12.** La  $A$  være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi finner egenverdiene til  $A$ :

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \iff (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 &= 0 \\ \iff \lambda^2 - 4\lambda + 5 &= 0 \\ \iff (\lambda-2)^2 + 1 &= 0 \\ \iff \lambda = 2+i \text{ eller } \lambda = 2-i. \end{aligned}$$

Vi finner egenvektorer som hører til egenverdien  $\lambda = 2 - i$ . Da må vi bestemme nullrommet til matrisen  $A - \lambda I_2$ :

$$A - (2-i)I_2 = \begin{bmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}$  er en egenvektor for  $A$  som hører til egenverdien  $\lambda = 2 - i$ .

Som i teoremet får vi  $A = PCP^{-1}$  med matrisene

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

og

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

## Symmetriske matriser

**Definisjon.** En reell matrise kalles *symmetrisk* dersom  $A = A^T$ .  $\triangle$

**Eksempel 11.13.** Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ -5 & 2 & -13 \\ 7 & -13 & 3 \end{bmatrix}$$

er symmetrisk.  $\triangle$

En reell  $2 \times 2$ -matrise  $A$  er symmetrisk hvis den har formen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker om denne matrisen er diagonaliserbar. Vi beregner egenverdiene:

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \iff (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 &= 0 \\ \iff \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 &= 0 \\ \iff \lambda = \frac{\pm\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} + a + c}{2}. \end{aligned}$$

For  $(a-c)^2 + 4b^2$  er et positivt reelt tall, ser vi at  $A$  har to *reelle* egenverdier.

Hvis  $(a-c)^2 + 4b^2 \neq 0$ , så er egenverdiene forskjellige. Det betyr at  $2 \times 2$ -matrisen  $A$  har to *forskjellige* egenverdier og er dermed diagonaliserbar. Hvis  $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$ , så må vi ha  $a-c=0$  og  $b=0$ , altså er  $A = a \cdot I_2$  en diagonalmatrise med egenrom hele  $\mathbb{R}^2$ .

Vi ser altså at en symmetrisk  $2 \times 2$ -matrise alltid er diagonaliserbar. Faktisk holder det vi nettopp fant ut i alle dimensjoner:

**Teorem 11.14.** La  $A$  være en symmetrisk  $n \times n$ -matrise. Da har  $A$   $n$  reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og  $A$  er diagonaliserbar (som en reell matrise).

**Merk.** Dette teoremet er fantastisk fordi for en vanlig  $n \times n$ -matrise er det nesten umulig å se med en gang om den er diagonaliserbar. Men for symmetriske matriser er det lett å se.  $\triangle$

### Oppgave

Sjekk om matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

er diagonaliserbar. Hvis den er diagonaliserbar, finn den tilsvarende diagonalmatrisen  $D$  og inverterbare matrise  $P$  slik at  $A = PDP^{-1}$ .

**Eksempel 11.15.** Vi ser på matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner egenverdiene:

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \iff (1-\lambda)((6-\lambda)^2 - 4) & - 2(2(6-\lambda) - 4) + 2(4 - 2(6-\lambda)) = 0 \\ \iff \lambda^3 - 13\lambda^2 + 36\lambda &= 0 \\ \iff \lambda(\lambda-4)(\lambda-9) &= 0. \end{aligned}$$

Det viser at egenverdiene for  $B$  er 0, 4 og 9. Egenvektorer er henholdsvis

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Altså får vi  $B = PDP^{-1}$  med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

△

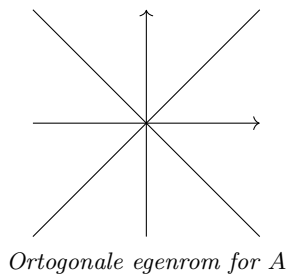
**Merk.** Det forrige eksempelet minner oss om at en matrise kan være diagonaliserbar uten å være inverterbar. △

## Symmetri og ortogonalitet

Tidligere så jobbet vi med ortogonalitet. Se litt nærmere på oppgaven og eksempelet vi nettopp studerte:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Underrommene av  $\mathbb{R}^2$  utspent av egenvektorene  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  til  $A$  ligger ortogonalt på hverandre:



Vi husker at vi kan sjekke om to vektorer i  $\mathbb{R}^2$  er ortogonale ved å sjekke om deres indreprodukt er null:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{u}_2 &= [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Det samme fenomenet observerer vi for egenrommene for  $B$ . Egenvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er ortogonale til hverandre:

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = [-4 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 + 1 - 1 = 0,$$

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_3 = [-4 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0,$$

$$\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{v}_3 = [0 \quad 1 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + 2 - 2 = 0.$$

Faktisk er det alltid slik for symmetriske matriser:

**Teorem 11.16.** La  $A$  være en reell symmetrisk  $n \times n$ -matrise. Egenvektorene til  $A$  tilhørende to distinkte egenverdier er ortogonale.

*Bevis.* La  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  være to egenvektorer som hører til egenverdier henholdsvis  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ . Vi beregner

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 &= (\lambda_1 \mathbf{v}_1)^T \cdot \mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot A^T \cdot \mathbf{v}_2 \\ &\text{(nå bruker vi at } A \text{ er symmetrisk: } A = A^T) \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot (A \cdot \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^T \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}_2) \\ &= \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Vi vet altså at

$$0 = \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 - \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2.$$

Nå bruker vi at  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  er forskjellige, og får

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = 0. \quad \square$$

**Definisjon.** En  $n \times n$ -matrise er *ortogonalt diagonaliserbar* dersom den har  $n$  ortogonale egenvektorer.

For en symmetrisk  $n \times n$ -matrise har vi vist at egenvektorene til forskjellige egenverdier er ortogonale til hverandre. Videre har vi at:

**Teorem 11.17.** En reell  $n \times n$ -matrise er ortogonalt diagonaliserbar med reelle egenvektorer hvis og bare hvis den er symmetrisk.

Nå kan vi spørre oss; Hvorfor kaller vi  $n \times n$ -matriser med  $n$  ortogonale egenvektorer for ortogonalt diagonaliserbare? La oss se på matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Den har tre ortogonale egenvektorer  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  og  $\mathbf{v}_3$ . Hvis vi normaliserer disse vektorene får vi egenvektorene

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi lager nå matrisen  $Q$  hvor kolonnevektorene er  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  og  $\mathbf{q}_3$ .

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 1 & -3 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

så ser vi at  $Q^T Q$  er

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \right) \left( \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 1 & -3 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi ser at  $Q^{-1} = Q^T$ . Altså får vi at  $B = QDQ^T$  med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Matrisen  $Q$  er et eksempel på en spesiell type matriser, nemlig:

**Definisjon.** En reell  $n \times n$ -matrise er en *ortogonal matrise* dersom kolonnevektorene utgjør en ortonormal mengde vektorer.  $\triangle$

Vi kan se at alle ortogonale matriser er inverterbare og har sin egen transponert som inversmatrise. La

$$Q = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n]$$

være en  $n \times n$  ortogonal matrise. Vi husker fra kapittel 9 at enhver ortogonal mengde vektorer er lineært uavhengige, så  $Q$  må være inverterbar. Multipliserer vi  $Q^T$  med  $Q$  får vi

$$\begin{aligned} Q^T Q &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix} [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_n^T \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n^T \mathbf{q}_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vektorene  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  er en ortonormal mengde, så vi vet at

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases}.$$

Dermed får vi at  $Q^T Q = I$ , og siden inversmatrisen til en inverterbar matrise er unik har vi  $Q^T = Q^{-1}$ . Denne diskusjonen forklarer hvorfor  $n \times n$ -matriser med  $n$  ortogonale egenvektorer kalles ortogonalt diagonaliserbare:

**Teorem 11.18.** La  $A$  være en reell symmetrisk  $n \times n$ -matrise. Da eksisterer det en diagonalmatrise  $D$  og en ortogonal matrise  $Q$  slik at  $A = QDQ^T$ .

#### Oppgave

Hva kan vi si om determinanten til en ortogonal matrise  $Q$  i tillegg til at den ikke er null?

## Hermiteske matriser

For  $n \times n$ -matriser med *komplekse* elementer trengs det en liten tilpasning for å få lignende resultater som for reelle symmetriske matriser.

La  $A$  være en  $n \times n$ -matrise med  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  som element i rad  $i$  og kolonne  $j$ . Da skriver vi  $A^*$  for matrisen

$$A^* = \overline{A^T},$$

dvs. vi transponerer  $A$  og så komplekskonjugerer vi resultatet. Med andre ord, elementet i  $A^*$  i rad  $i$  og kolonne  $j$  er  $\overline{a_{ji}}$ .

**Definisjon.** En  $n \times n$ -matrise  $A$  kalles *hermitsk* hvis

$$A = A^*.$$

$\triangle$

**Merk.** I en hermitsk matrise  $A$  må elemente på diagonalen være reelle tall fordi de oppfyller  $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ .

Dessuten er en reell matrise hermitsk hvis og bare hvis den er symmetrisk.  $\triangle$

Til slutt har vi at:

**Teorem 11.19.** En hermitsk  $n \times n$ -matrise har  $n$  reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og er ortogonalt diagonaliserbar.