Kapittel 1

Komplekse tall

Oppfinnelsen av nye tallsystemer henger gjerne sammen med løsning av polynomligninger. Ligningen

$$2x + 4 = 0$$

har ingen positiv løsning, selv om koeffisientene er positive tall. Ligningen

$$2x - 3 = 0$$

har ingen heltallig løsning, selv om koeffisientene er hele tall. Ligningen

$$x^2 - 2 = 0$$

har ingen rasjonale løsninger, siden

$$x = \sqrt{2}$$

ikke kan skrives som en brøk.

Generelt er det slik at en polynomlikning

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

ikke nødvendigvis har en løsning i det tallsystemet koeffisientene er hentet fra. Likningen

$$x^2 + 1 = 0$$

har ingen reelle løsninger. Man kan spørre seg hvorvidt det finnes tallsystemer der en vilkårlig polynomligning alltid har løsning, og svaret er ja. Vi skal ta for oss et slikt tallsystem, nemlig de *komplekse tallene.*

Den imaginære enheten

For å komme igang med komplekse tall, kan vi først betrakte ligningen

$$x^2 + 1 = 0.$$

På videregående skole ville du sagt at denne ligningen ikke har noen løsning, for det finnes ingen reelle tall som passer i ligningen.

Derfor finner vi opp et nytt tall. Vi kaller det i, den *den imaginære enheten.* Nå kan det være fristende å 'løse' likningen over for x, og definere

$$i = \sqrt{-1}.$$

Med dette nye tallet kan vi skrive kvadratroten av negative tall på en pen måte:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{(-1)} = 2i.$$

Men vi må være litt forsiktige med denne strategien. Regneregelen

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

gjelder nemlig ikke når a og b er negative tall. Følgende klassiske eksempel er litt artig:

$$\begin{aligned} 1 &= (-1) \cdot (-1) \\ &= \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \\ &\stackrel{?}{=} \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i^2 = -1. \end{aligned}$$

Altså er det ikke slik at $\sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ og vi må derfor være litt forsiktige med å sjonglere med negative tall og rottegn. En god strategi er å definere i ved ligningen

$$i^2 = -1,$$

for dette er egenskapen vi er ute etter. Skulle det dukke opp et negativt tall undre rottegnet, må vi heller skrive løsningen ved hjelp av den imaginære enheten, slik at vi ikke blir forledet til å utføre noen ulovlige regneoperasjoner.

Altså: vi skriver for eksempel $\sqrt{3}i$ heller enn $\sqrt{-3}$, siden $(\sqrt{3}i)^2 = \sqrt{3}^2(i^2) = -3$.

Eksempel 1.1. Løser vi ligningen

$$x^2 + x + 1 = 0$$

gir annengradsformelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

at

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i. \qquad \triangle$$

Vi skjønner av eksempelet at alle løsninger av andregradsligninger nå kan skrives $z = a + bi$, der a, b er reelle tall. Med bakgrunn i dette definerer vi komplekse tall slik, altså:

Komplekse tall er tall

$$z = a + bi.$$

der a og b er reelle tall, og i er den imaginære enhet. De kalles henholdsvis *realdelen* og *imaginærdelen* til z, og skrives gjerne $\operatorname{Re} z$ og $\operatorname{Im} z$. Mengden av alle komplekse tall skrives $\mathbb{C}$. De reelle tallene er en delmengde av de komplekse tallene, for dersom $b = 0$, er z reell.

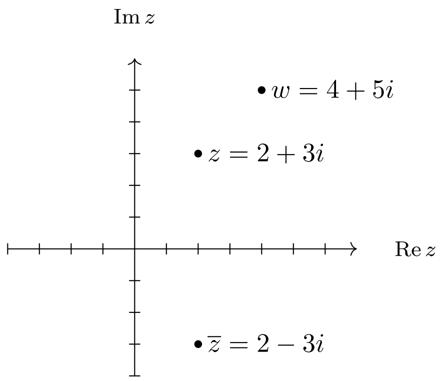
Et komplekst tall har en viss ytre likhet med vektorer i $\mathbb{R}^2$. Hvis komponentene til $\mathbf{x}$ er x_1 og x_2, og enhetsvektorer i koordinatretningene defineres som

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

skriver vi gjerne

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

På lignende vis kan vi tenke at realdelen $a = \operatorname{Re} z$ og imaginærdelen $b = \operatorname{Im} z$ er komponenter i en vektor, og avmerke z i *det komplekse planet.*



Det komplekse planet. Tallet $2 + 3i$ plottes som punktet $(2, 3)$, hvis vi tenker på x-aksen som den reelle-aksen og y-aksen som den imaginære aksen.

Operasjoner på komplekse tall

Regneregler for komplekse tall følger regnereglene for reelle tall, så det er ingen grunn til å pugge disse formlene, men du må huske at $i^2 = -1$.

> **Teorem 1.2.** *La $z = a + bi$ og $w = c + di$ være komplekse tall. Vi har*
>
> $$z + w = a + c + (b + d)i$$
> $$z - w = a - c + (b - d)i$$
> $$z \cdot w = ac - bd + (bc + ad)i$$
> $$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Bevis. De to første er trivielle. Vi beviser gangeregelen:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (bc + ad)i \end{aligned}$$

og deleregelen:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \end{aligned} \qquad \square$$

Komplekse tall legges altså sammen komponentvis akkurat som vektorer i $\mathbb{R}^2$, mens multiplikasjon og divisjon har ikke noen tilsvarende operasjoner i $\mathbb{R}^2$.

Eksempel 1.3. La $z = 2 + 3i$ og $w = 4 + 5i$.

$$z + w = 2 + 4 + (3 + 5)i = 6 + 8i$$

$$z - w = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2 \\ &= 8 - 15 + (12 + 10)i = -7 + 22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} \\ &= \frac{8 + 15 + (12 - 10)i}{16 + 25} = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i. \end{aligned} \qquad \triangle$$

Dette trikset for deling er verdt å merke seg. Når vi deler et komplekst tall på $w = c + di$, ganger vi altså oppe og nede med $w = c - di$. Denne operasjonen, å skifte fortegn på imaginærdelen, er så vikitg at den får et eget navn.

Definisjon. La $z = a + bi$ være et komplekst tall. Da er z *konjugert* gitt som

$$\overline{z} = a - bi.$$

$\triangle$

Merk at $z\overline{z} = a^2 + b^2$ er et reelt tall. Her er et par regneregler for konjugering.

> **Teorem 1.4.** *La $z = a + bi$ og w være komplekse tall. Noen regneregler er:*
>
> $$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$
> $$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \qquad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$$
> $$z + \overline{z} = 2a \qquad z - \overline{z} = 2bi$$

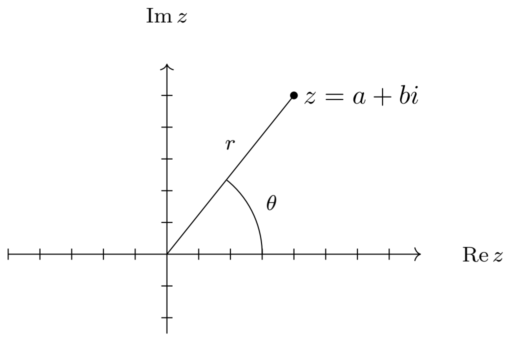
De fleste er enkle å sjekke, en av de blir gitt i øvingsopplegget.

Polare koordinater

Når vi skal regne med komplekse tall, er det ofte enklere å skrive de om ved hjelp av såkalt *polare koordinater*. Spesielt vil denne formen være enkle å håndtere når vi skal multiplisere og ta potenser av komplekse tall.

La r være avstanden fra det komplekse tallet $z = a + bi$ til origo, og la θ være vinkelen z gjør med den reelle aksen. Noen enkle geometriske betraktninger gir oss at

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} z = r\cos\theta \\ b &= \operatorname{Im} z = r\sin\theta. \end{aligned}$$



Polare koordinater

Formlene over gir a og b som funksjon av r og θ. Litt mer trigonometri gir den andre veien:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{a^2+b^2} \\
\theta &= \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{for } a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{for } a < 0 \\ \pi/2 & \text{for } a = 0,\ b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{for } a = 0,\ b < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Når $a > 0$ er altså z i første eller fjerde kvadrant, og da er $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Når $a < 0$ er z i andre eller tredje kvadrant, da blir $\tan(\pi - \theta) = -\frac{b}{a}$. Når $a = 0$ betyr det altså at z ligger på den imaginære aksen, og da er vinkelen opplagt $\pi/2$ eller $3\pi/2$.

Merk også at vi kan legge til vilkårlige multipler av 2π overalt, samt at for $z = 0$ er ikke θ definert.

Vi skriver ellers

$$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

for avstanden fra z til origo. Dette tallet kalles gjerne *absoluttverdi* eller *modulus* til z.

Polarform for komplekse tall er altså $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, der $r > 0$ er reell, og θ er en vinkel i $[0, 2\pi)$.

Vinkelen
$$\theta = \arg z$$
kalles *vinkelen* eller *argumentet* til z.

Følgende ulikhet er populært kalt *trekantulikheten*. I øvingsopplegget blir du utfordret til å bevise denne.

Teorem 1.5. *La z og w være komplekse tall. Da gjelder at*

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Eulers formel

Polarformen til et komplekst tall $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, er altså bestemt av to tall r og θ. Vi har ikke sagt hva det skal bety å putte komplekse tall i en eksponent, så vi står fritt til å define hva det skal bety. Vi kan dermed definere $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, og dermed får vi en enklere notasjon for komplekse tall nemlig $re^{i\theta}$. Dette er Eulers formel. Det finnes en mer naturlig måte å definere e^{ix} på, og med denne definisjonen blir Eulers formel et teorem.

Vi har ikke maskineriet for å gjøre dette skikkelig i Matematikk 3, men skal se raskt på idéen likevel.

Fra envariabel kalkulus husker du kanskje taylorrekkene til eksponensialfunksjonen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

sinusfunksjonen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og cosinusfunksjonen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dersom vi bruker den imaginære enheten i til å skrive

$$\cos x = 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}$$

og

$$i\sin x = ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

og legger disse to sammen, får vi

$$\cos x + i\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = e^{ix}.$$

der den siste likheten kan tenkes på som definisjonen av e^{ix}. I M1 er ikke konvergens av komplekse rekker pensum, så egentlig må dette tas som en symbolsk manipulasjon; vi vet strengt tatt ikke hva som skjer med konvergensen til en taylorrekke når du ganger den med i. Men alle de tre rekkene er absolutt konvergente for alle $x \in \mathbb{C}$, så vi har vist at

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

Formelen kalles altså *Eulers formel*. En viktig grunn til at denne notasjonen er nyttig, er at vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen er enkle å utlede fra denne formelen.

Teorem 1.6. *La $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. Da er*

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$$

Bevis.

$$
\begin{aligned}
e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) \\
&= \cos x\cos y - \sin x\sin y \\
&\quad + i(\cos x\sin y + \sin x\cos y) \\
&= (\cos x + i\sin x)\cdot(\cos y + i\sin y) = e^{ix}e^{iy} \quad \square
\end{aligned}
$$

Med Eulers formel kan vi altså skrive komplekse tall veldig kompakt på *polar form*:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Skrivemåten $z = a + bi$ kalles gjerne *kartesisk form* eller *standard form*. Ganging og deling på polar form er elegant og enkelt ved hjelp av eulers formel. Disse formlene følger nesten direkte fra forrige teorem.

Teorem 1.7. *La $z = re^{i\theta}$ og $w = se^{i\alpha}$. Da gjelder:*

$$z \cdot w = rse^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\theta-\alpha)}$$

Eksempel 1.8. La $z = 1 + i$ og $w = 1 + \sqrt{3}i$, slik at

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

og

$$w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Vi beregner

$$z \cdot w = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

og

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{-\pi}{12}}.$$

△

Eksempel 1.9. Eulers formel gir at $e^{\pi i/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{3\pi i/2} = -i$ og $e^{2\pi i} = 1$. △

Eksempel 1.10. Dersom $z = re^{i\theta}$ gir Eulers formel $\overline{z} = re^{-i\theta}$. △

Røtter av komplekse tall

Vi startet beskjedent med å ville løse ligningen $x^2 + 1 = 0$. For dette innførte vi den imaginære enheten i, og fikk alle komplekse tall $a + bi$ på kjøpet. Faktisk kan vi ved hjelp av komplekse tall løse alle polynomielle ligninger. Dette er algebraens fundamentalteorem, som vi ikke skal bevise i Matematikk 3.

Teorem 1.11. *Et polynom*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i),$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = 0$$

Merk. I teoremet over er $a_n = 1$. Det er for å slippe å luke ut tilfellet $a_n = 0$. Dersom $a_n \neq 0$, og noe annet enn 1, blir faktoriseringen

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = a_n\prod_{i=1}^{n}(z - z_i).$$

Dersom en faktor $(z - z_k)$ forekommer m ganger i faktoriseringen, sier vi at z_k har *multiplisitet* m.

Eksempel 1.12. Polynomet

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z - 1)^3$$

har en rot ($z = 1$) med multiplisitet 3. △

Eksempel 1.13. Polynomet

$$z^2 - 2z + 2$$

har to røtter

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i,$$

begge med multiplisitet 1, slik at

$$z^2 - 2z + 2 = (z - 1 - i)(z - 1 + i).$$

△

Som nevnt, skal vi ikke bevise algebraens fundamentalteorem, men et spesialtilfelle kan vi analysere med det vi kjenner til så langt, nemlig løsninger av polynomlikningen

$$z^n - w = 0$$

for et vilkårlig komplekst tall w. Vi skal se med egne øyne at denne likningen alltid har n løsninger. Vi begynner med å skrive w på polar form med valgfritt antall omdreininger rundt origo

$$w = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2m\pi)}.$$

Dersom vi skriver

$$w^{1/n} = (re^{i(\theta+2m\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta/n+2m\pi/n)},$$

ser vi at det nå finnes n potensielle verdier for $\sqrt[n]{w}$, alle sammen gyldige løsninger av $z^n = w$. Hvis du velger $0 \leq m \leq n - 1$ får du ut alle sammen. Vi definerer den prinsipale n-te roten av w som

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n},$$

og så kan vi skrive de andre røttene som

$$\sqrt[n]{w} \cdot e^{2m\pi i/n}$$

for $1 \leq m \leq n - 1$. Dette er analogt til hvordan man i det reelle tilfellet har to løsninger av ligningen

$$x^2 = 4,$$

definerer kvadratroten som den positive løsningen

$$\sqrt{4} = 2,$$

og skriver den andre løsningen som $-\sqrt{4}$.

Eksempel 1.14. Vi finner alle løsninger av ligningen

$$z^5 = -1.$$

Siden

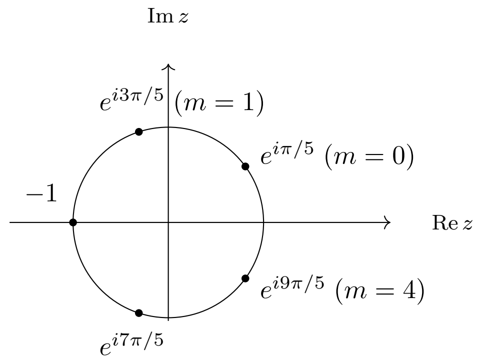
$$-1 = e^{i(\pi+2m\pi)},$$

får vi

$$(-1)^{1/5} = e^{i(\pi/5+2m\pi/5)}.$$

Vi skriver opp løsningene for $0 \leq m \leq 4$:

$e^{i\pi/5}(= \sqrt[5]{-1})$, $e^{i3\pi/5}$, $e^{i5\pi/5}(= -1)$, $e^{i7\pi/5}$ og $e^{i9\pi/5}$



Femterøttene til -1

Merk hvordan røttene sprer seg jevnt ut på en sirkel om origo. Merk også at om vi lar $m > 4$ eller $m < 0$, får vi røtter som allerede er listet opp. $\triangle$