Interaktiv forelesning

Vektorrom

Instructions

Go to

www.menti.com

Enter the code

8153 3391

Or use QR code

Diskutér litt sammen: Hva er $egentlig$ en vektor?

Er dette vektorer?

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

0	0
Ja, så klart!	Hæ, nei??

Er dette vektorer?

$$p(x) = 2 - 5x + 3x^2 \text{ og } f(x) = 3\sin(x) + 4\cos($$

Jepp!	Nei, dette er jo funksjoner	Jeg tipper "ja" siden du spør, men jeg skjønner ikke hvorfor
0	0	0

En vektor er et element i et vektorrom

- Det er ikke egentlig så nøye hvordan vektorer ser ut
- Det viktige er hvordan vektorer oppfører seg

Vektorrom

- Et vektorrom er en samling med ting (f.eks. vektorer i $\mathbb{R}^2$, polynomer, kontinuerlige funksjoner)
- Vektorer kan legges sammen, og de kan skaleres
- Denne samlingen med ting må oppfylle vektorromsaksiomene
- En basis for et vektorrom er en lineært uavhengig liste med vektorer, som utspenner vektorrommet
- Et vektorrom har veldig mange basiser, men alle basiser er like store
- Antall vektorer i en basis kaller vi dimensjonen til vektorrommet
- Eksempel: en basis for $\mathbb{R}^2$ er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (dimensjon 2)

Her er fem vektorrom:

1. Polynomer av grad ≤ 2, altså $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$
2. Øvre triangulære 2×2-matriser. altså $\{\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$
3. Det lineære spennet:
$$\mathrm{Sp}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^4$$
4. Funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ på formen $f(x) = a \sin x + bx^2 + ce^x$, der a, b, c er i $\mathbb{R}$
5. Det lineære spennet $\mathrm{Sp}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\} \subset \mathbb{R}^3$

For disse fem vektorrommene:

- Hva er nullvektor?
- Gitt en vektor $\mathbf{x}$, hva er $-\mathbf{x}$?
- Finn en basis for vektorrommet.
- Finn en annen basis for vektorrommet.

Underrom

- La V være et vektorrom og la $U \subseteq V$ (altså er U en delmengde av V)
- Da er U et underrom av V dersom
- Nullvektoren er med i U
- Hvis $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er med i U, så er $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ med i U
- Hvis $\mathbf{x}$ er med i U, så er $c\mathbf{x}$ med i U, der c er en skalar

Er mengden $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; x = y \right\}$ et underrom av $\mathbb{R}^3$?

Er mengden $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; |x| = |y| \right\}$ et underrom av $\mathbb{R}^3$?

Er $\{p(x) \in \mathcal{P}_2 \mid p'(x) = 0\}$ et underrom av $\mathcal{P}_2$?

En kort pustepause (diskutér sammen eller gruble litt): Kan du alltid finne en basis for et vektorrom?

Jepp!	Hmm, nei ikke alltid?	Hva var basis igjen?
0	0	0

Vektorrom knyttet til en matrise A

- Nullrom: alle vektorer $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Kolonnerom: Alle vektorene i spennet til kolonnene til A
- Radrom: Alle vektorene i spennet til radene til A
- Dimensjonen til kolonnerommet kaller vi rangen til en matrise

Finn en basis for nullrommet til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Finn en basis for kolonnerommet til matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Bonusoppgave

Finn et eksempel på to matriser som er radekvivalente men som har ulike kolonnerom.

Superbonusoppgave

Vis at hvis A er en $m \times n$-matrise, så er

- $\mathrm{Col} A$ er et underrom av $\mathbb{R}^m$
- $\mathrm{Null} A$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$