

Interaktiv forelesning

Vektorrom



Instructions

Go to

www.menti.com

Enter the code

8153 3391



Or use QR code



Diskutér litt sammen: Hva er *egentlig* en vektor?



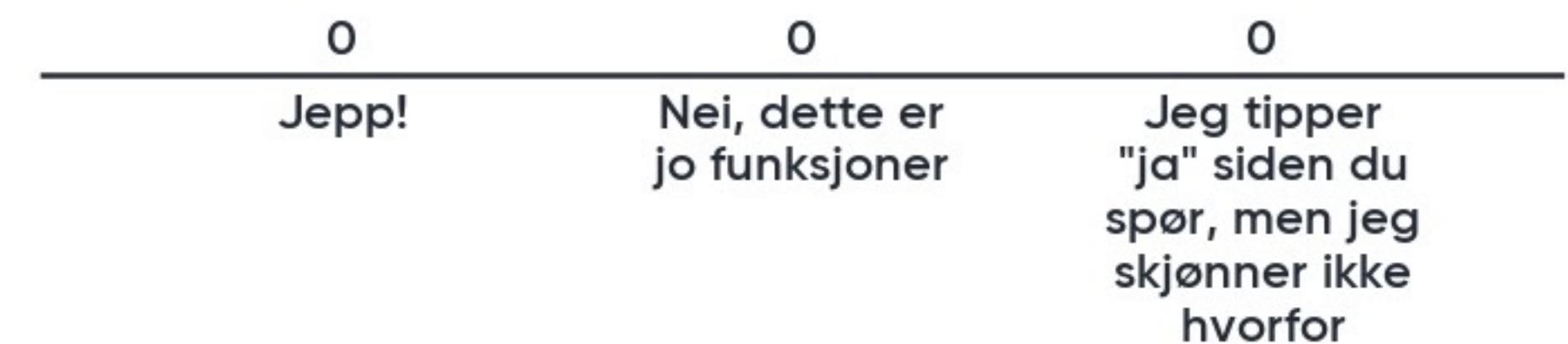
Er dette vektorer?

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Er dette vektorer?

$p(x) = 2 - 5x + 3x^2$ og $f(x) = 3 \sin(x) + 4 \cos(x)$



En vektor er et element i et vektorrom

- Det er ikke egentlig så nøye hvordan vektorer ser ut
- Det viktige er hvordan vektorer oppfører seg



Vektorrom

- Et vektorrom er en samling med ting (f.eks. vektorer i \mathbb{R}^2 , polynomer, kontinuerlige funksjoner)
- Vektorer kan legges sammen, og de kan skaleres
- Denne samlingen med ting må oppfylle vektorromsaksiomene
- En basis for et vektorrom er en lineært uavhengig liste med vektorer, som utspenner vektorrommet
- Et vektorrom har veldig mange basiser, men alle basiser er like store
- Antall vektorer i en basis kaller vi dimensjonen til vektorrommet
- Eksempel: en basis for \mathbb{R}^2 er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (dimensjon 2)



Her er fem vektorrom:

1. Polynomer av grad ≤ 2 , altså $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$
2. Øvre triangulære 2×2 -matriser. altså $\left\{ \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$
3. Det lineære spennet:

$$\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

4. Funksjoner fra \mathbb{R} til \mathbb{R} på formen $f(x) = a \sin x + bx^2 + ce^x$, der a, b, c er i \mathbb{R}
5. Det lineære spennet $\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$

For disse fem vektorrommene:

- Hva er nullvektor?
- Gitt en vektor \mathbf{x} , hva er $-\mathbf{x}$?
- Finn en basis for vektorrommet.
- Finn en annen basis for vektorrommet.



Underrom

- La V være et vektorrom og la $U \subseteq V$ (altså er U en delmengde av V)
- Da er U et underrom av V dersom
 - Nullvektoren er med i U
 - Hvis x og y er med i U , så er $x + y$ med i U
 - Hvis x er med i U , så er cx med i U , der c er en skalar



Er mengden $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x = y \right\}$ et underrom av \mathbb{R}^3 ?



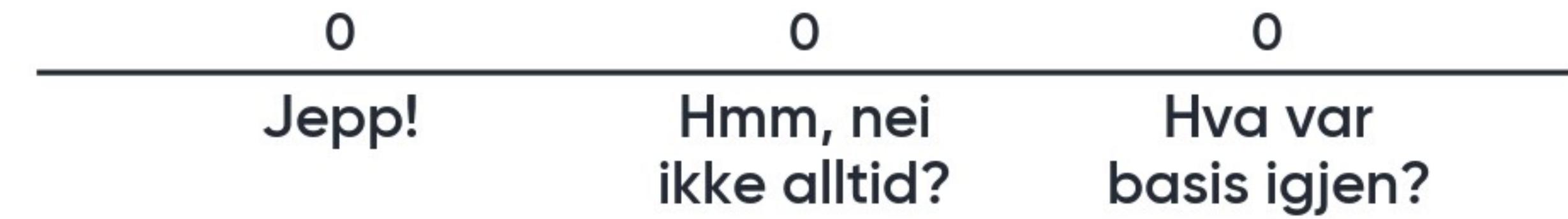
Er mengden $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid |x| = |y| \right\}$ et underrom av \mathbb{R}^3 ?



Er $\{p(x) \in \mathcal{P}_2 \mid p'(x) = 0\}$ et underrom av \mathcal{P}_2 ?



En kort pustepause (diskutér sammen eller gruble litt): Kan du alltid finne en basis for et vektorrom?



Vektorrom knyttet til en matrise A

- Nullrom: alle vektorer x slik at $Ax = 0$
- Kolonnerom: Alle vektorene i spennet til kolonnene til A
- Radrom: Alle vektorene i spennet til radene til A
- Dimensjonen til kolonnerommet kaller vi rangen til en matrise



Finn en basis for nullrommet til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.



Finn en basis for kolonnerommet til matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.





Bonusoppgave

Finn et eksempel på to matriser som er radekvivalente men som har ulike kolonnerom.



Superbonusoppgave

Vis at hvis A er en $m \times n$ -matrise, så er

- $\text{Col}A$ er et underrom av \mathbb{R}^m
- $\text{Null}A$ er et underrom av \mathbb{R}^n

