TMA4115 uke 3 lineære ligninger

Friday, 19 January 2024 11:55

Lineære ligninger	Ikke lineære ligninger
$3x+2y=4$	$x^2=-1$
$ax+by+cz=d$ hvor a,b,c,d er konstanter	$e^x-\cos y=0$

Eksempel kontekst for lineære ligninger

- temperaturen over tid når vi varmer noe

→ felles for mange kontekster som kan beskrives ved lin. ligninger er at disse "enkelt"

Fra ligninger til matriser

$$2x+3y \quad (= \ldots)$$
$$4x+5y \quad (= \ldots) \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$*x+*y+*z=*$

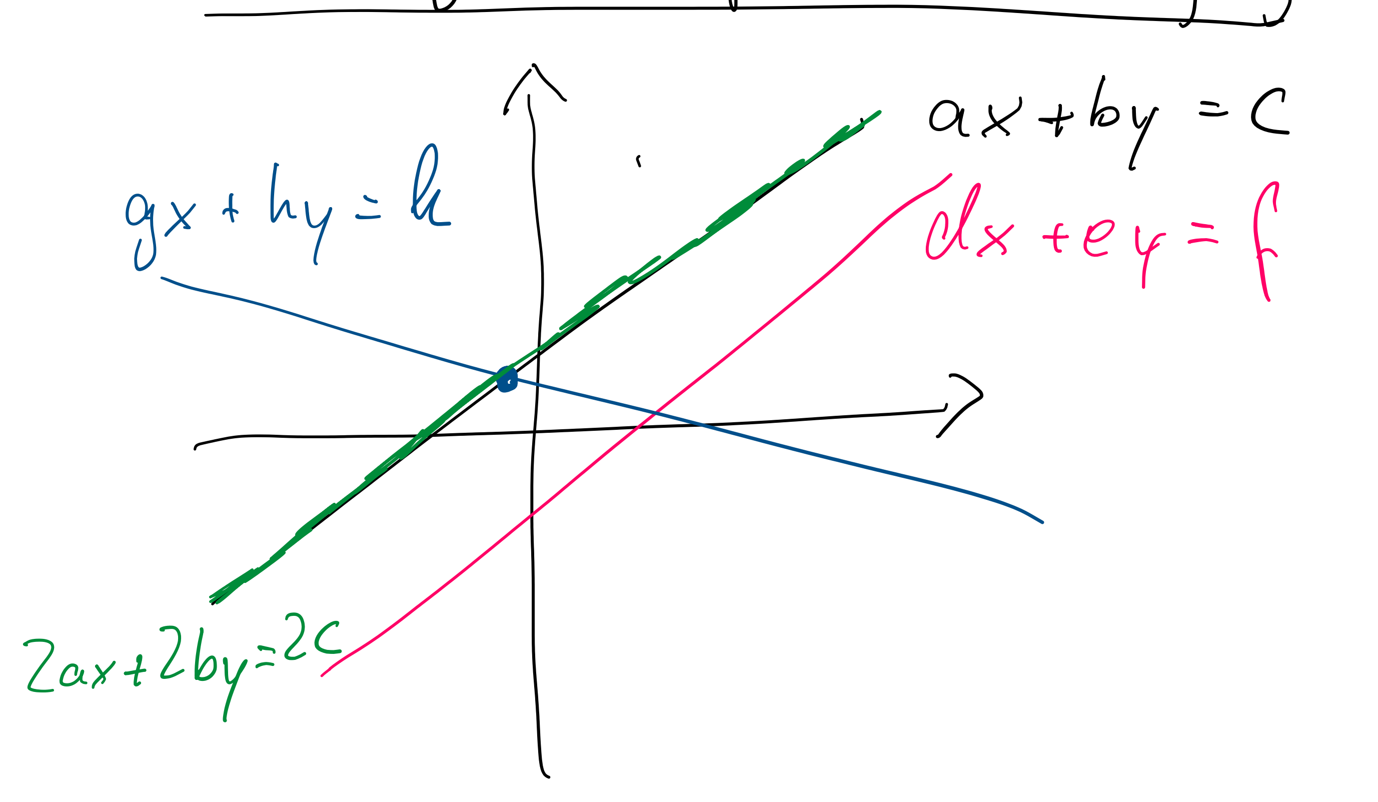
$$\left[\begin{array}{ccc:c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right]$$ utvidet koeffisient-matrise

radoperasjoner

$$\left[\begin{array}{ccc:c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right]$$ radredusert matrise

$*z=* \iff z=\ldots$

Løsningsteori for lineære ligninger



Lin. ligningssystem	# løsninger
og	0
og	1
og	∞

Antallet av løsninger er generell sett de eneste mulighetene for alle lineære systemer

$$\left[\begin{array}{cc:c} \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pivotelementer

kolonne uten pivot element gir oss en fri variabel

ikke kolonne med pivot element men siden det er ikke tilordnet til en variabel får vi ingen fri variabel fra den

$$x+y=1$$
$$\iff x=1-y$$

uendelig mange løsninger

kolonne uten pivot

$$\left[\begin{array}{cc:c} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right]$$

pivot elementer

systemet har ingen løsning pga. $0x+0y=1$

Oppgave

$$\begin{aligned} x+y+z&=4 \\ x-y+2z&=-3 \end{aligned} \iff \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R2-R1} \left[\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 & -7 \end{array}\right]$$

uten pivot

pivot

frie variabler: z

Viser at systemet har $\underline{\infty}$ løsninger

$$-2y+z=-7$$
$$\iff y=+\frac{7}{2}+\frac{z}{2}$$

$$x+y+z=4$$
$$\iff x=4-y-z$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}z$$

Oppgave 2

$$\begin{aligned} (1+i)x+y&=1 \\ (1-i)x-(1+i)y&=i \end{aligned} \iff \left[\begin{array}{cc:c} 1+i & 1 & 1 \\ 1-i & -(1+i) & i \end{array}\right]$$

$$\left(\xrightarrow{R2-\frac{1-i}{1+i}R1} \left[\begin{array}{cc:c} 1+i & 1 & 1 \\ 0 & ? & ? \end{array}\right] \right)$$ ofte for mye arbeid

$$\frac{1-i}{1+i}=-i$$

$$z\cdot\overline{z}=|z|^2$$

$$\xrightarrow{R1\cdot\overline{(1+i)}=1-i} \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1-i & 1-i \\ 1-i & -(1+i) & i \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R2-\frac{1-i}{2}R1} \left[\begin{array}{cc:c} \boxed{2} & 1-i & 1-i \\ 0 & \boxed{(-1+i)-\frac{(1-i)^2}{2}} & i-\frac{(1-i)^2}{2} \end{array}\right]$$

pivot

$$y=\frac{i-\frac{(1-i)^2}{2}}{2i}$$

$$x=-1+i-\frac{(\cancel{1}^2-\cancel{2}i+\cancel{i}^2)}{\cancel{2}}$$
$$=-1+i+i=2i-1$$

$$2x+(1-i)y=1-i$$

$$\iff x=\frac{1-i-(1-i)y}{2}$$

$$=\frac{1-i}{2}-\frac{\frac{i-\frac{(1-i)^2}{2}}{2i}}{2}$$