TMA4110 Matematikk 3

Innlevering 6

Frist: onsdag 10. april kl. 21:00.

Husk at dere kan benytte mattelaben aktivt for å få tilbakemelding på besvarelsen både før og etter innlevering.

Oppgaver til kapittel 11

1. Anta at A er en symmetrisk, reell $n \times n$-matrise hvor *alle* egenverdiene er strikt positive (> 0).

a) La $\boldsymbol{v}$ være en egenvektor til A med tilhørende egenverdi λ. Vis at $\boldsymbol{v}^\top A\boldsymbol{v} > 0$.

b) La nå $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Vis at også $\boldsymbol{u}^\top A\boldsymbol{u} > 0$.
Hint: Vi vet at A kan diagonaliseres som $PDP^\top$, der P er en ortogonalmatrise hvis kolonner består av n ortogonale egenvektorer i $\mathbb{R}^n$, og D er diagonalmatrisen bestående av de positive egenverdiene. Vi kan spesielt da skrive $\boldsymbol{u}$ som en lineærkombinasjon av de ortogonale egenvektorene til A.

c) La $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{w}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Bevis at operasjonen

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle = \boldsymbol{u}^\top A\boldsymbol{w}$$

utgjør et indreprodukt på $\mathbb{R}^n$ ved å vise symmetri, linearitet og positivitet.

Oppgaver til kapittel 12

2. La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestem mengden av vektorer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ som minimerer avstanden mellom $A\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{b}$.

3. Bruk minste kvadraters metode på de overbestemte systemene

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

4. Regn ut andregradspolynomet som passer best til datapunktene

$$(0,0), \quad (-1,1), \quad (1,1) \quad \text{og} \quad (2,2)$$

på formen (x,y) ved hjelp av minste kvadraters metode. Merk at her er det to datapunkter med samme x-koordinat. I praktiske situasjoner kan det være mange observasjoner (y-verdier) på samme lokasjon x, noe du kanskje har lært/vil lære mer om i statistikkemner. Hva blir verdien til polynomet i $x = 3$?

5. La M være en av de følgende matrisene og avgjør hvilke av dem som er stokastiske og eventuelt regulært stokastiske:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$

Finn deretter likevektsvektorene i de tilfellene hvor matrisene genererer en Markovkjede.

6. Vis at en regulær stokastisk 2×2-matrise

$$M = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}$$

med $a, b \in (0,1)$ har en unik likevektsvektor.

Oppgaver til kapittel 13

7. Løs initialverdiproblemet

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

når

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Hvordan kan du vite at du har regnet riktig?

8. Skissér fasediagrammet til systemet $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ og forklar hvordan egenverdiene bestemmer bildet når

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **d)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

9. La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

b) Bestem løsningen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ av systemet

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2 + y_3, \\ y_3' = -y_1 - 3y_2 + y_3 \end{cases}$$

som oppfyller intialverdibetingelsen $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$, $y_3(0) = 2$.

c) Hva skjer med løsningen når $t \to \infty$?

Noen tallsvar

3.

a) $\begin{bmatrix} -13/14 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

5. Grensen blir $\begin{bmatrix} 5/19 \\ 10/19 \\ 4/19 \end{bmatrix}$.

7. Generelle løsninger:

a) $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}$

b) $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t}$