

# Innlevering 1

Frist: onsdag 24. januar kl. 21:00.

## Oppgaver til kapittel 1

1. Skriv disse tallene på normalform  $z = x + iy$ :

a)  $(1 - i)^2$     b)  $\frac{1 + 3i}{2 - i + 3 + 2i}$     c)  $\frac{1}{i^5}$

2. Beregn polarformen til

a)  $-1 + 2 + 3i$     b)  $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^8$

og skissér tallene og deres komplekskonjugerte i det komplekse planet.

3. Finn og tegn alle røttene til  $\sqrt[6]{-1}$  i det komplekse planet.

4. Gi en geometrisk tolkning av multiplikasjon av to komplekse tall  $z = re^{i\theta}$  og  $w = se^{i\alpha}$  basert på deres polarformer.

5. Vis at  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  og  $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$ .

6. Finn alle løsningene til ligningene

a)  $z^3 = \sqrt{5} + 2i$     b)  $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$

c)  $(z + 1)^4 = (z - 1)^4$

Hvordan kan du verifisere at du har funnet alle løsningene?

7. La  $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$  være et tredjegradspolynom med **reelle** koeffisienter  $a, b, c$ .

a) Anta at  $z$  er slik at  $P(z) = 0$ . Begrunn at  $P(\bar{z}) = 0$ . *Hint: Bruk regneregler for å vise at  $P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0$ .*

b) Kombiner a) og Teorem 1.11 (kapittel 1) for å begrunne at  $P(z) = 0$  alltid har minst én reell løsning.

## Oppgaver til kapittel 2

8. Finn først antall pivotelementer til følgende matriser og utfør deretter radoperasjoner slik at de blir på redusert trappeform:

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. Løs følgende ligningssystemer ved hjelp av gausseliminasjon og beskriv løsningsmengdene:

a)  $\begin{cases} 2x + y + 3w = 5 \\ -x + z + 2w = -2 \\ x + y + w = 1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2a + b + 3d = 7 \\ -a + c + 2d = -1 \\ a + b + d = 6 \end{cases}$

*Dette tilsvarer å løse en matriseligning*

$$AX = B$$

*hvor  $A$  er en  $3 \times 4$ -matrise,  $X$  utgjør en  $4 \times 2$ -matrise og  $B$  er en  $3 \times 2$ -matrise.*

10. Vi ser videre på ligningssystemene i oppgave 9.

a) Kan  $x$  og  $a$  velges som frie variabler?

b) Hvordan kan du verifisere at du har funnet korrekte løsninger?

11. Løs ligningssystemene

a)  $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - x_3 = -10 \\ 8x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -23 \\ -6x_1 + x_2 + 5x_3 = 18 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} iz + 3w - u = 1 + i \\ 2z - 4iw = 2 \end{cases}$

*Snarvei: Hva med å løse systemene samtidig ved å inkludere begge høyresidene i samme totalmatrise?*

*Flere oppgaver på neste side.*

12. Kari har funnet ut at løsningene til et ligningssystem er lik

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

mens Ola mener at de er på formen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Kan begge ha rett? Begrunn svaret.

13. Finn alle løsninger av ligningssettet, der utvidet matrise har trappeform:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & b & c \end{array} \right]$$

for alle forskjellige reelle verdier av  $a$ ,  $b$  og  $c$ .

## Noen tallsvar

---

1.

a)  $-2i$       b)  $-\frac{2}{17} + \frac{9}{17}i$       c)  $-i$

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.

a)  $\sqrt{10}e^{-i \arctan 3}$       b)  $e^{\frac{4}{3}\pi i}$

3.  $\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i)$ ,  $\pm i$  og  $\frac{1}{2}(-\sqrt{3} \pm i)$ .

6.

a)  $\sqrt[3]{3}e^{\frac{i}{3}[\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}})+2\pi n]}$  for  $n = 0, 1, 2$ .

b)  $-i \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ .

c) 0 og  $\pm i$ .

8.

9.

a)  $x = 4 - 2t$ ,  $y = -3 + t$ ,  $z = 2 - 4t$  og  $w = t \in \mathbb{R}$

b)  $a = 1 - 2t$ ,  $b = 5 + t$ ,  $c = -4t$  og  $d = t \in \mathbb{R}$

11.

a)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$  og  $x_3 = 5$ .

b)  $z = 1 + 2i + 2it$ ,  $w = 1 + t$  og  $u = t \in \mathbb{C}$