Ekstraoppgaver 12

Oppgaver til kapittel 13

1. Skissér faseplottet til systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

2. Finn generell løsning av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

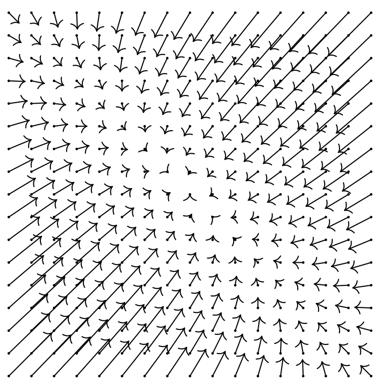
b) $A = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}$

3. Løs initialverdiproblemene $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ når

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Skissér fasediagrammet til systemet som svarer til vektorfeltet i figuren nedenfor.



5. Skissér faseplottet til systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ og forklar hvordan egenverdiene bestemmer bildet når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

6. Finn en basis for løsningsrommet til $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ og bestem generell løsning når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

7. Løs initialverdiproblemene $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. Vis at systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

med en gitt initialverdi $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ har en entydig løsning.

Du kan anta at løsningsrommet er tredimensjonalt.

9. Vi ser på det inhomogene systemet

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for løsningsrommet til den tilhørende homogene ligningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

b) Sjekk om $y = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$ eller $y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$ er en løsning for systemet.

c) Finn en generell løsning for systemet.

Eksamensoppgaver

Vår 2017: Oppgave 6
Høst 2017: Oppgave 5
Høst 2018: Oppgave 3
Kont 2019: Oppgave 4