Ekstraoppgaver 9

Oppgaver til kapittel 10

1.

a) Regn ut egenverdiene til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og finn tilhørende egenrom.

b) Skissér egenrommene.

2.

a) Regn ut egenvektorene til

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

og finn tilhørende egenrom.

b) Skissér egenrommene.

3. Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke. Begrunn svaret ditt.

a) En $n \times n$-matrise har alltid n egenverdier.

b) Dersom A har en ikke-null egenverdi c, så kan ikke A være lik null-matrisen.

c) To egenvektorer til en matrise A som svarer til samme egenverdi kan være lineært uavhengige.

4. La A være en $n \times n$-matrise. Vis at A og dens transponerte A^T har like egenverdier.

5. La A være en $n \times n$-matrise som har n forskjellige egenverdier λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n. Lag en $n \times n$-matrise

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix},$$

der $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor som hører til egenverdien λ_1, og $\mathbf{v}_2$ er en egenvektor som hører til egenverdien λ_2, og så videre.

a) Kan du finne ut om matrisen V er inverterbar eller ikke?

b) Dersom V er inverterbar, hvordan ser matrisen $V^{-1}AV$ ut?

c) Finn en 3×3-matrise som har egenverdier 1, 2 og 3, med tilhørende egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6. Er kolonnene lineært avhengige? Hvis ja, finn nullrommet til matrisen.

a)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3i & 4i \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & 4 \\ 3 & 4i & 5 \\ 4 & 5 & 6i \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & 4 \\ 3i & 4 & 5 \\ 4i & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

7. Finn hver matrises determinant, egenverdier og tilhørende egenrom.

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Beregn produktet av egenverdiene, med multiplisitet, for hver matrise i forrige oppgave.

9. Sett sammen egenvektorene til

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i en 3×3-matrise P der egenvektorene er kolonner, og beregn $P^{-1}AP$.

10. Finn egenverdiene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

11. Vis at dersom λ er en egenverdi for matrisen A er λ^2 en egenverdi for A^2.

12. Finn egenverdiene til rotasjonsmatrisen

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Hva er egenverdiene til $T_{2\theta}$?

13. Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Hint for del **d)**: Polynomdivisjon. Hvis ikke $\lambda = 1$ fungerer, prøv $\lambda = 2$. Hvis ikke $\lambda = 2$ fungerer, prøv $\lambda = 3, \ldots$

14.

a) Vis at matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ikke har noen reelle egenverdier.

b) Gi en geometrisk forklaring på del **a)**.

15.

a) Finn vektorene som svarer til at

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er blitt rotert med θ radianer.

b) Utled formelen for 2×2-matrisen T_θ som roterer vektorer θ radianer mot klokken ved multiplikasjon. Hint: Hva skjer når du ganger T_θ med $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$?

c) For hvilke verdier av θ har T_θ en reell egenverdi? Gi en geometrisk forklaring.

16. La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^2 = A$. Hva kan du da si om egenverdiene til A?
Hint: Hvis $Ax = \lambda x$, hva kan du da si om $A^2 x$?
Prøv å finne noen forskjellige matriser A som er slik at $A^2 = A$. Kan du finne en slik matrise som ikke har noen egenverdier? En som har én egenverdi? To egenverdier? Flere enn to?

Eksamensoppgaver

Kont 2018: Oppgave 6
Vår 2018: Oppgave 6
Vår 2019: Oppgave 7