Ekstraoppgaver 8

Oppgaver til kapittel 9

1. Vi ser på indreproduktrommet av kontinuerlige funksjoner fra $[0, 1]$ til $\mathbb{R}$, $C([0, 1])$, med indreproduktet definert i Teorem 9.22. Regn ut indreproduktet, vinkelen og avgjør om de er ortogonale:

a) $-x$ og e^x

b) $x^3 - \frac{1}{3}x$ og $x - \sin x$

c) x og $x^2 - \frac{3}{4}x$

2. Finn den ortogonale projeksjonen av vektoren

$$\begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

på underrommet utspent av vektorene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Vi ser på indreproduktrommet av kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$.

a) Finn en ortogonal basis for $\text{Sp}\{1, x, x^2\}$ ved å bruke Gram–Schmidt på 1, x og x^2, i den rekkefølgen.

b) Gir dette samme svar som Eksempel 9.25 i notatet? Er dette et problem? Forklar.

4. Vi ser på indreproduktrommet av kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$.

a) Regn ut lengden til x, x^2, x^3, x^4 og x^5.

b) Hva er lengden til x^n for en vilkårlig n? Hva skjer når $n \to \infty$?

c) Skissér x^n for nok n til at du kan gi en geometrisk forklaring på grensen i del **b)**.
Hint: Lengden er koblet til arealet under grafen. Hva skjer med dette arealet når n vokser?

5. Avgjør hvilke vektorer som er ortogonale med hverandre.

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

6. Bruk Gram-Schmidts metode for å finne en ortogonal basis med utgangspunkt i:

a) Vektorene oppgitt i oppgave 5a.

b) Vektorene oppgitt i oppgave 5b.

7. Hva blir den ortogonale projeksjonen av

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ned på underrommet utspent av vektorene gitt i oppgave 5a?

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$ ned på underrommet utspent av vektorene gitt i oppgave 5b?

8. La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finn den ortogonale projeksjonen av **u** på **v**. Tegn **u**, **v** og projeksjonen i samme koordinatsystem. Hva er vinkelen mellom vektorene?

9. Beregn $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ og $\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ når

a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) Hva er $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}))$ i del **a)-b)**?

10. Betrakt underrommet $U = \text{Sp}\{1, e^x\}$ av $\mathcal{C}[0, 1]$, med indreprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Finn en ortogonal basis for U.

11.

Betrakt underrommet $V = \text{Sp}\{1, x, e^x\}$ av $\mathcal{C}[0, 1]$, med indreprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

a) Finn en ortogonal basis for V.

b) La $h(x) = x^2$. Finn $g(x) = \text{proj}_V\, h(x)$ og skisser $h(x)$ og $g(x)$ (obs: kan bli nokså ekle tall i denne oppgaven).

Hint:
$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$$
og
$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Eksamensoppgaver

Vår 2019: Oppgave 6
Kont 2019: Oppgave 2
Kont 2019: Oppgave 7
Høst 2019: Oppgave 5ab