Ekstraoppgaver 7

Oppgaver til kapittel 9

1. Vis at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utgjør en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$, og finn koordinatene til punktet

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i denne basisen.

2. Finn det ortogonale komplementet til underrommet utspent av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Regn ut den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\mathbf{v}$.

b) Finn standardmatrisen $[P_\mathbf{v}]$ til $P_\mathbf{v}$.

c) Gi et geometrisk argument til å avgjøre om $P_\mathbf{v}$ er surjektiv og/eller injektiv.

d) Gi et geometrisk argument til å bestemme dimensjonen til $\ker P_\mathbf{v}$, $\mathrm{Null}[P_\mathbf{v}]$, $\mathrm{im}\, P_\mathbf{v}$ og $\mathrm{Col}[P_\mathbf{v}]$.

4. Avgjør hvilke vektorer som er ortogonale med hverandre.

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Bruk Gram-Schmidts metode for å finne en ortogonal basis med utgangspunkt i:

a) Vektorene oppgitt i oppgave 4a.

b) Vektorene oppgitt i oppgave 4b.

6. Hva blir den ortogonale projeksjonen av

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ned på underrommet utspent av vektorene gitt i oppgave 4a?

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$ ned på underrommet utspent av vektorene gitt i oppgave 4b?

7. La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Tegn $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og projeksjonen i samme koordinatsystem. Hva er vinkelen mellom vektorene?

8. Beregn $P_\mathbf{u}(\mathbf{v})$ og $\mathbf{v} - P_\mathbf{u}(\mathbf{v})$ når

a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) Hva er $P_\mathbf{u}(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - P_\mathbf{u}(\mathbf{v}))$ i del **a)-b)**?

9. Betrakt underrommet $U = \mathrm{Sp}\{1, e^x\}$ av $\mathcal{C}[0,1]$, med indreprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Finn en ortogonal basis for U.

10.

Betrakt underrommet $V = \mathrm{Sp}\{1, x, e^x\}$ av $\mathcal{C}[0,1]$, med indreprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

a) Finn en ortogonal basis for V.

b) La $h(x) = x^2$. Finn $g(x) = \mathrm{proj}_V\, h(x)$ og skisser $h(x)$ og $g(x)$ (obs: kan bli nokså ekle tall i denne oppgaven).

Hint:

$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$$

og

$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Eksamensoppgaver

Høst 2015: Oppgave 6
Høst 2018: Oppgave 6
Vår 2019: Oppgave 2b