Ekstraoppgaver 6

Oppgaver til kapittel 8

1. La $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være funksjonen gitt ved formelen $f(z) = z^2$. Er f injektiv, surjektiv, bijektiv?

2. Finn ut om funksjonen T er en lineærtransformasjon mellom reelle vektorrom. Hvis den er det: Finn standardmatrisen til T, regn ut $\ker T$ og $\operatorname{im} T$, og finn ut om T er injektiv, og om den er surjektiv.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tan x \\ e^y \end{bmatrix}$

b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x + y$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x + y - 1$

d) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2$

e) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 5y + 4z \\ y - 6z \end{bmatrix}$

f) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x + y \\ y + z \\ z + w \end{bmatrix}$

3. La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være en lineærtransformasjon gitt ved $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ -x + 3y \\ 3x - 2y \end{bmatrix}$. Finn en vektor $\mathbf{v}$ slik at $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$.

4. La

$$\mathscr{B} = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

og

$$\mathscr{C} = \left(\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

være basiser for $\mathbb{R}^2$. Finn matrisene A og B, slik at $[\,\mathbf{x}\,]_{\mathscr{C}} = A[\,\mathbf{x}\,]_{\mathscr{B}}$ og $[\,\mathbf{x}\,]_{\mathscr{B}} = B[\,\mathbf{x}\,]_{\mathscr{C}}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$.

5.

a) Finn en basis $\mathscr{B}$ for $\mathcal{P}_2$ slik at

$$[\,p\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix}$$

er koordinatene til et andregradspolynom p.

b) Finn en basis $\mathscr{C}$ for $\mathcal{P}_2$ slik at

$$[\,p\,]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

er koordinatene til et andregradspolynom p.

c) La p være gitt ved $p(x) = x^2$. Finn koordinatene til p med hensyn på henholdsvis $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$.

d) Finn lineærtransformasjoner som oversetter mellom disse basisene, altså

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{og} \quad S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

slik at

$$T([\,p\,]_{\mathscr{B}}) = [\,p\,]_{\mathscr{C}} \quad \text{og} \quad S([\,p\,]_{\mathscr{C}}) = [\,p\,]_{\mathscr{B}}$$

for alle polynomer p. Sjekk at T og S gir riktig resultat for koordinatene du fant del **c)**.

6. La $T_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen som roterer vektorer med vinkelen θ.

a) Finn standardmatrisen for T_θ.

b) Bevis den trigonometriske likningen

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta).$$

Hint: Sammenlign $T_{2\theta}$ og $T_\theta \circ T_\theta$.

7. La $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ være en lineærtransformasjon fra $\mathbb{C}^n$ til seg selv, og la A være standardmatrisen til T. Vis at følgende påstander er ekvivalente:

(a) A er inverterbar.

(b) Kolonnene i A er lineært uavhengige.

(c) Kolonnene i A utspenner $\mathbb{C}^n$.

(d) T er injektiv.

(e) T er surjektiv.

(f) T er en isomorfi.

8. La U, V og W være endeligdimensjonale vektorrom, og anta at vi har lineærtransformasjoner

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$$

slik at sammensetningen $S \circ T$ er en isomorfi.

a) Kan du ut fra dette konkludere med om T og S er injektive og/eller surjektive?

b) Hva kan du si om dimensjonene til U, V og W?

9. Finn ut om funksjonen T er en lineærtransformasjon. Hvis den er det: Finn standardmatrisen til T, regn ut $\ker T$ og $\operatorname{im} T$, og finn ut om T er injektiv, og om den er surjektiv.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin x + \cos y \\ -\sin y \end{bmatrix}$

b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = e^x + e^y$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x - 7y \\ 3z - 8x - 7y \\ 5y - 4x - 8z \\ 6y - 6x - 4z \end{bmatrix}$

d) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$

e) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x + 2y + 3z + 4w$

10. Finn standardmatrisen til lineærtransformasjonen

a) ... $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som speiler planet om x-aksen.

b) ... $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterer planet med $\frac{3}{4}\pi$.

11. La S og R være som i forrige oppgave. Finn standardmatrisene til sammensetningene $S \circ R$ og $R \circ S$. Gi en geometrisk beskrivelse av hva disse lineærtransformasjonene gjør.

12. La $D\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som sender hvert polynom til den deriverte av polynomet:

$$D(p) = p'$$

La $G\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som ganger polynomet den får inn med x:

$$G(p) = q, \quad \text{der} \quad q(x) = x \cdot p(x).$$

a) Vis at D og G er lineærtransformasjoner.

b) Finn bildet og kjernen til D og til G.

c) Finn ut om D og G er injektive og/eller surjektive.

d) Beskriv lineærtransformasjonen $(D \circ G) - (G \circ D)$.

e) Nå begrenser vi oss til endeligdimensjonale polynomvektorrom. For hvert positive heltall n definerer vi lineærtransformasjoner

$$D_n\colon \mathcal{P}_n \to P_{n-1} \quad \text{og} \quad G_n\colon \mathcal{P}_{n-1} \to P_n$$

på samme måte som vi definerte D og G. Velg en passende basis for hvert av vektorrommene $\mathcal{P}_2$ og $\mathcal{P}_3$, og finn matrisene for D_3 og G_3 med hensyn på disse basisene.

13. La $D\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ være funksjonen som er gitt ved derivasjon:

$$D(f) = f'$$

a) Vis at D er en lineærtransformasjon.
Hint: I Matematikk 1 lærte vi regneregler for derivasjon av i) en sum av to funksjoner og ii) en funksjon multiplisert med en konstant. Du kan bruke disse.

b) Finn kjernen $\ker D$ av lineærtransformasjonen D. Er $\ker D$ et endeligdimensjonalt vektorrom? I så fall: Finn en basis.

c) Avgjør om D er surjektiv.
Hint: Analysens fundamentalteorem.

Eksamensoppgaver

Høst 2018: Oppgave 9
Kont 2019: Oppgave 3
Høst 2019: Oppgave 5cd